ISSN 1828-5961

Federico Fallavollita

Architetto, è Ricercatore di Disegno presso la Facoltà di Architettura dell'Università di Bologna. Si occupa in particolare di geometria descrittiva e del suo rinnovamento attraverso i metodi della rappresentazione digitale, argomenti su cui pubblica diverse memorie.
www.unibo.it/docenti/federico.fallavollita

Marta Salvatore

Architetto, è Dottore di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente. Si occupa in particolare di geometria descrittiva e del suo rinnovamento attraverso i metodi della rappresentazione digitale, argomenti su cui pubblica diverse memorie.
www.martasalvatore.it

Geometria e costruzione. La teoria delle linee di curvatura nella stereotomia della pietra
Geometry and construction.Theory of principal curvature lines in stone stereotomy

Il contributo illustra lo studio teorico e pratico della teoria delle linee di curvatura delle superfici elaborata da Gaspard Monge alla fine del Settecento, e la sua applicazione alle costruzioni in pietra da taglio, con particolare riferimento al caso di studio (proposto da Monge e rivisitato da Hachette e Leroy) di una volta ellissoidale. L'intento è quello di ottimizzare la costruzione di queste linee nel metodo della rappresentazione matematica, almeno per il caso specifico di studio.
Il legame che sussiste fra la le teorie geometrico descrittive e i principi della progettazione stereotomica è significativo. Costruzioni geometriche teoriche, apparentemente astratte, trovano riscontri e applicazioni nella pratica delle costruzioni e diventano, a volte, condizione indispensabile alla soluzione di casi complessi come quello presentato.

The paper illustrates the theoretical and practical study of the theory of curvature lines elaborated by Gaspard Monge at the end of the eighteenth century, and its application to the construction of cut stone architecture, with particular reference to the specific case study of an ellipsoidal vault (proposed by Monge and revisited by Hachette and Leroy). The intent is to optimize the construction of these lines in the method of the mathematical representation, at least for the case study. The link that exists between the theories of descriptive geometry and the stereotomic design principles is significant. Theoretical geometric constructions, seemingly abstract, are applied in the practice of construction and become, at times, a prerequisite to solving complex cases such as that presented.

Parole chiave: linee di curvatura, quadriche confocali, curve focali, teorema di Dupin, volta ellissoidale, stereotomia

Keywords*: principal curvature lines, confocal quadrics, focal curves, Dupin's theorem, ellipsoidal vault, stereotomy*

ISSN 1828-5961

INTRODUZIONE

Questo contributo intende illustrare lo studio teorico e pratico della teoria delle linee di curvatura delle superfici elaborata da Gaspard Monge alla fine del Settecento, e la sua applicazione alle costruzioni in pietra da taglio, con particolare riferimento al caso di studio (proposto da Monge e rivisitato da Leroy e Hachette) di una volta ellissoidale.

L'intento è quello di ottimizzare la costruzione di queste linee in ambiente informatico attraverso il metodo della rappresentazione matematica, almeno per il caso specifico di studio[1].

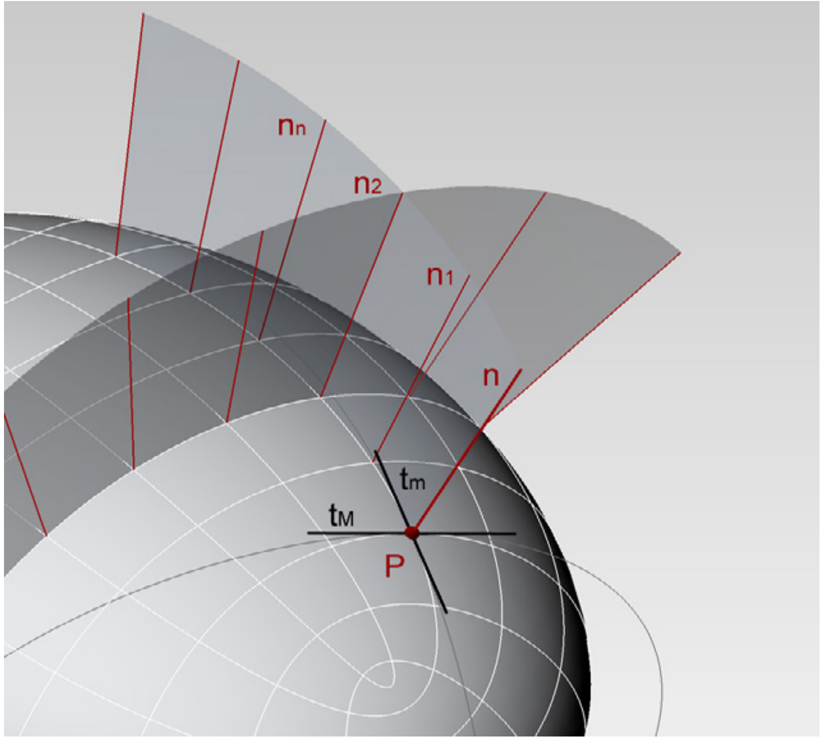
L'obiettivo generale consiste nel mostrare come la teoria mongiana delle linee di curvatura sia ancora attuale e come le proprietà di queste linee possano avere ricadute significative nelle costruzioni.

Il metodo di analisi utilizzato si basa su due momenti diversi: una ricognizione storica del problema specifico attraverso lo studio della letteratura geometrico-descrittiva; una fase di elaborazione sintetica, attraverso il metodo della rappresentazione matematica.

Lo studio è anche un'occasione per mostrare il valore euristico del disegno digitale nello studio della geometria applicata ai problemi costruttivi dell'architettura. Come noto tra gli obiettivi essenziali della geometria descrittiva c'è lo studio delle forme nello spazio, delle loro proprietà, delle loro relazioni.

L'utilità della geometria descrittiva nel risolvere e indagare i problemi dell'architettura ha avuto il suo apice nella scuola mongiana e, in particolare, nello studio degli apparecchi stereotomici. Questo è stato possibile grazie alla sistematizzazione mongiana di questa scienza e alla nuova linfa che il disegno ha dato nei suoi sviluppi teorici.

Oggi l'informatica sembra restituire nuovo slancio alla geometria descrittiva e ciò ha ricadute dirette in architettura. La possibilità di disegnare direttamente nello spazio con una accuratezza del micron rende possibile indagare e sperimentare forme geometrico-costruttive sempre più complesse.



1. Linee di curvatura, loro proprietà e superfici sviluppabili date dalle normali alla superficie lungo le linee di curvatura

Nella pagina seguente:
2. Costruzione delle coniche focali di un ellissoide generico

TEORIA MONGIANA DELLE LINEE DI CURVATURA

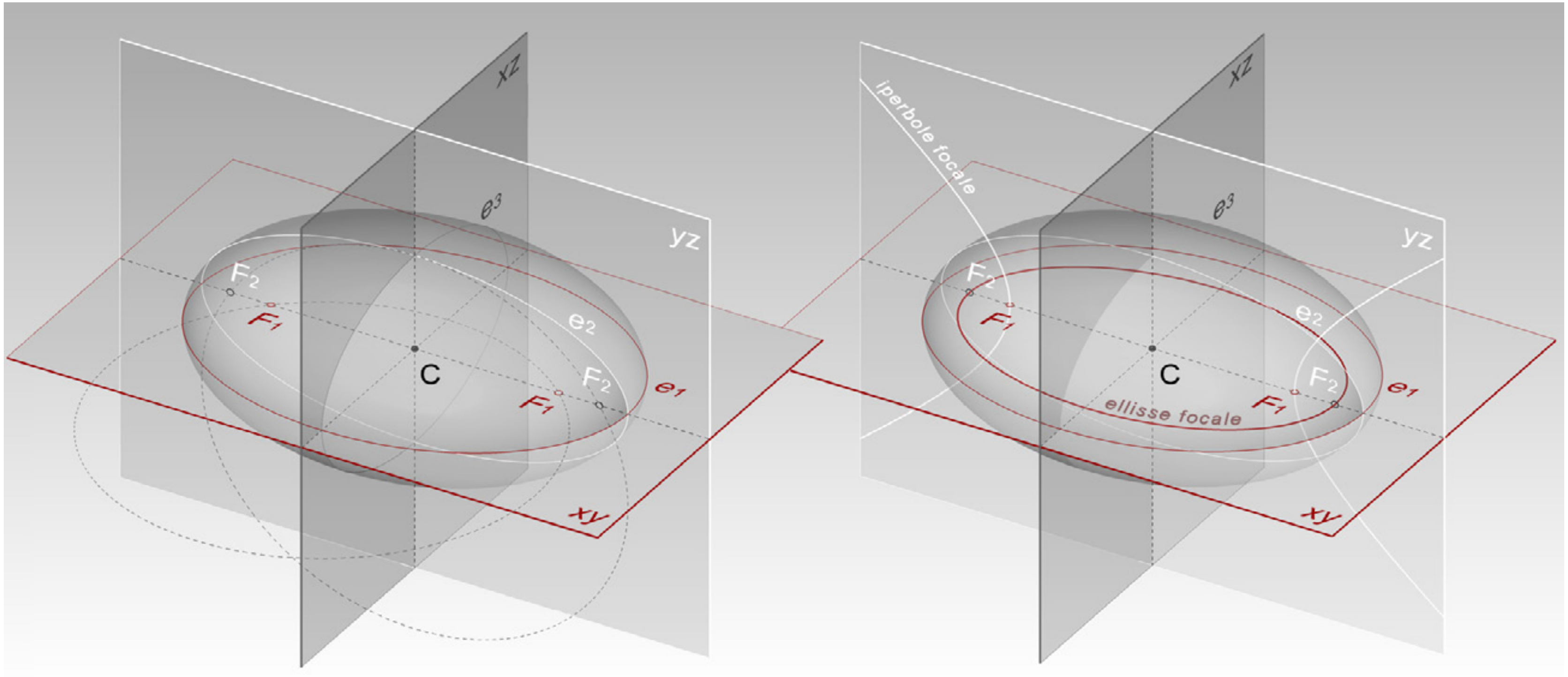
Le linee di curvatura di una superficie sono due particolari famiglie di linee le cui proprietà hanno trovato feconde applicazioni a partire dalla loro teorizzazione alla fine del Settecento.

Come suggerisce il nome stesso, le linee di curvatura sono legate al concetto di curvatura massima e minima di una superficie in un punto. Come noto, data una superficie curva e la normale alla superficie in un suo punto è possibile costruire un fascio di piani passanti per questa normale. Tali piani sezionano la superficie secondo linee curve, ognuna delle quali ha, nel punto, curvatura diversa[2]. Le curve che hanno curvatura massima e minima nel punto, e che sono fra loro perpendicolari, si chiamano sezioni principali di curvatura, le loro curvature si dicono curvature principali, le loro tangenti si dicono direzioni principali di curvatura[3].

La direzione delle linee di curvatura in ogni punto è quella delle direzioni principali di curvatura della superficie. Ogni superficie gode della proprietà di avere due schiere di linee di curvatura ortogonali fra loro (che seguono la prima e seconda curvatura), ognuna delle quali copre la superficie senza lacune[4]. L'insieme delle normali ad una superficie costruite nei punti di una sua linea di curvatura forma una superficie sviluppabile, perpendicolare per costruzione alla superficie data. Le sviluppabili costruite secondo la prima e la seconda curvatura sono perpendicolari fra di loro (fig. 1).

È possibile costruire in maniera approssimata in

ISSN 1828-5961



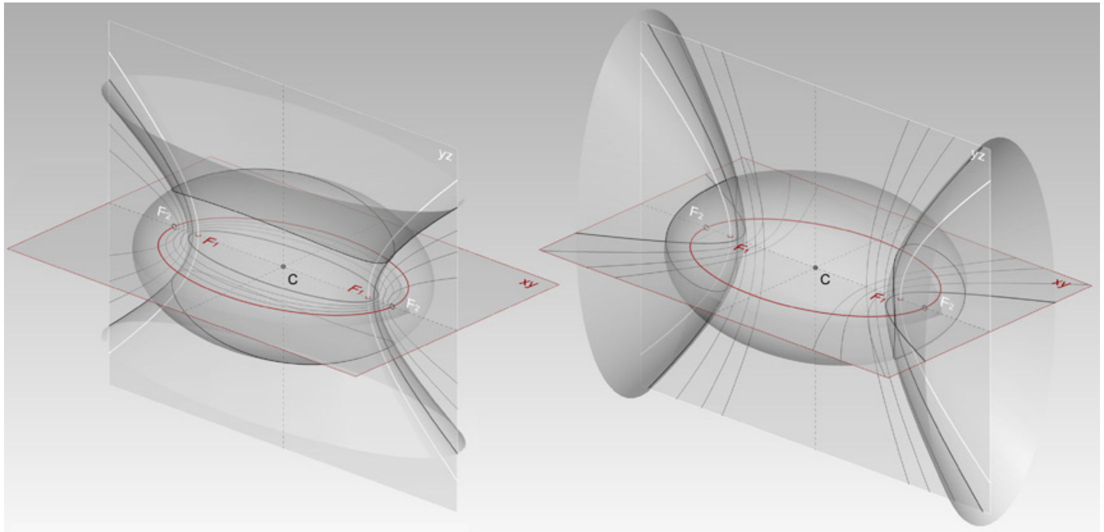
ambiente digitale una linea di curvatura considerando un punto **P** di una superficie data. Si costruisce la direzione di curvatura massima (o minima) $\mathbf{t_1}$ nel punto **P**. Si costruisce poi un punto $\mathbf{P_1}$, che appartiene anch'esso alla superficie e che è il più vicino a **P** nella direzione di $\mathbf{t_1}$. Per $\mathbf{P_1}$ si determina la direzione principale di curvatura massima (o minima) $\mathbf{t_2}$. Si costruisce allora un punto $\mathbf{P_2}$ che appartiene alla superficie e che è il più vicino a $\mathbf{P_1}$ nella direzione di $\mathbf{t_2}$, e così via[5].

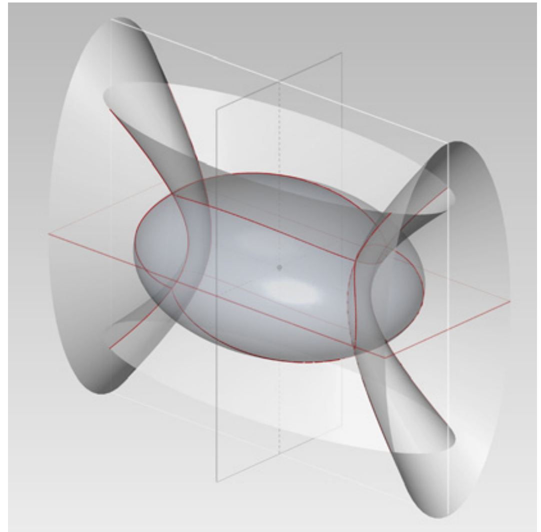
La scoperta delle linee di curvatura si deve a Gaspard Monge, che ne dimostra l'esistenza insieme a molte delle loro proprietà. Monge si imbatte nelle linee di curvatura quando i suoi studi avevano tutt'altro interesse. Era infatti coinvolto nella soluzione di un problema di carattere economico relativo al trasporto di terre. Per la soluzione di questo problema si trovò a studiare sistemi di rette che nello spazio obbediscono ad una determinata legge[6]. Dimostrò allora che: tutte le normali ad una superficie curva, possono essere considerate come le intersezioni di due schiere di sviluppabili, tali che ognuna delle superfici della prima schiera tagli tutte quelle della seconda in linee rette ad angolo retto[7]. Questa proposizione aprì la strada a studi ed approfondimenti diversi[8].

SISTEMI DI QUADRICHE CONFOCALI

La teoria delle linee di curvatura si arricchì di numerosi contributi sviluppati in gran parte dagli allievi della scuola di Monge. Fra questi si ricordano gli studi di Binet e di Dupin relativi a particolari sistemi di superfici. Binet dimostrò come le linee di curvatura di una superficie di secondo grado siano date dall'intersezione di questa superficie con una coppia di quadriche di tipo diverso, a questa confocali, e come queste tre superfici siano perpendicolari fra di loro. Pochi anni più tardi Dupin generalizzò la questione, meglio nota come Teorema di Dupin, dimostrando che data una schiera triplamente ortogonale di superfici, le linee di curvatura su ogni superficie sono le sue intersezioni con le altre superfici della schiera[9].
Tre superfici sono ortogonali fra loro se i loro piani tangenti in un punto comune sono perpendicolari fra loro. Poiché per un punto dello spazio si possono sempre far passare tre piani rispettivamente perpendicolari, si potrebbe pensare che dato un sistema di due superfici ortogonali sia sempre possibile costruire le terza superficie. Secondo quanto afferma il teorema di Dupin, que-

ISSN 1828-5961



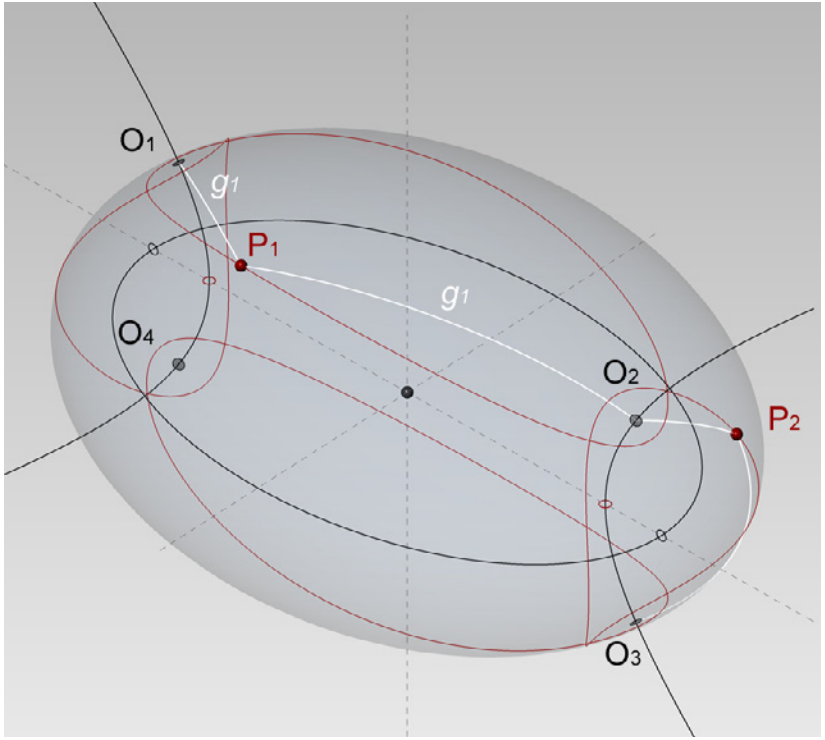


3. Costruzione degli iperboloidi a una e a due falde confocali con un ellissoide generico.

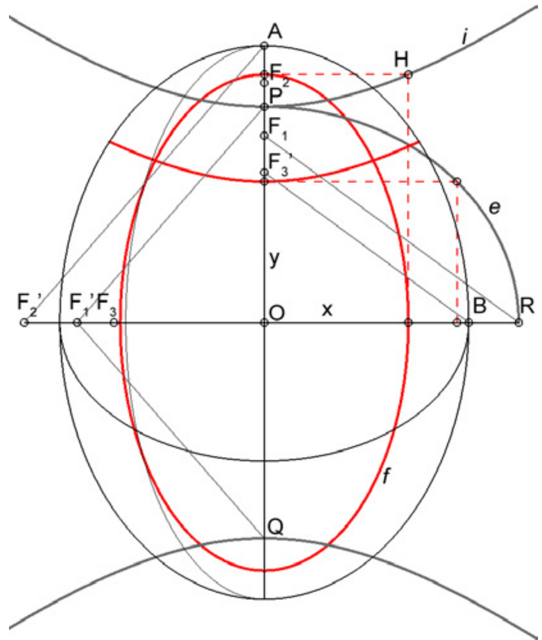
4 Linee di curvatura di un sistema di quadriche confocali.

sta condizione sussiste esclusivamente nei casi in cui le due superfici date si sezionano secondo le loro linee di curvatura.
Un esempio di superfici che godono di questa proprietà è costituito dalle quadriche confocali, in particolare da un ellissoide generico, da un iperboloide ellittico a una falda e da un iperboloide ellittico a due falde[10].
In un sistema di quadriche confocali, le tre superfici hanno lo stesso centro e gli stessi piani principali[11]. Due quadriche si dicono confocali se hanno in comune le curve focali. Le curve focali delle quadriche sono coniche, nello specifico un'ellisse e un'iperbole che appartengono a due dei tre piani principali delle superfici. Il piano dell'iperbole contiene l'asse maggiore dell'ellisse focale; i fuochi dell'ellisse focale coincidono con i vertici dell'iperbole focale e vice versa. Una superficie quadrica ha la proprietà di avere delle curve focali se le sezioni della superficie secondo i suoi piani principali sono coniche confocali con le curve focali (fig. 2).
Per ottenere le linee di curvatura sulla superficie di un ellissoide è possibile quindi servirsi delle proprietà di questo sistema di quadriche confocali.
Per costruire il modello matematico di una qualsiasi delle possibili configurazione del sistema a partire da un ellissoide generico, si determinano in primo luogo i piani principali **xy**, **xz**, **yz** dell'ellissoide. Si considerano poi i piani **xy** e **yz** e si costruiscono per questi due piani le sezioni principali. Poiché le coniche focali di una quadrica hanno gli stessi fuochi delle sezioni principali, si dovranno determinare i fuochi delle ellissi, sezioni principali dell'ellissoide[12]. Noti questi è possibile costruire le coniche focali perché i fuochi di una conica focale coincidono con i vertici dell'altra. La costruzione è immediata, infatti i software di modellazione matematica consentono di norma la costruzione delle coniche dati i fuochi e i vertici[13] (fig. 2).
Una volta determinate le coniche focali è possibile costruire le due superfici quadriche confocali dell'ellissoide, e cioè un iperboloide ellittico a una falda e un iperboloide ellittico a due falde.
Ogni superficie quadrica ellittica può essere costruita per dilatazione di una superficie quadrica di rivoluzione della stessa specie.
Ciò premesso, per costruire queste superfici sono necessarie le loro sezioni principali secondo i piani delle coniche focali. I fuochi di queste curve sono quelli delle coniche focali, perciò la costruzione è immediata. Nel caso dell'iperboloide a una falda queste sono un'iperbole sul piano **yz**, confocale con l'iperbole focale, e un'ellisse (l'ellisse di gola dell'iperboloide) sul piano **xy**, confocale con l'ellisse focale, che hanno in comune i vertici. La scelta della prima di queste due sezioni è arbitraria, perché possiamo scegliere di costruire una superficie qualsiasi della stessa schiera[14]. Facendo ruotare l'iperbole intorno al suo asse coniugato si ottiene un iperboloide rotondo a una falda. Si può ricavare, da questo, l'iperboloide ellittico cercato appli-

ISSN 1828-5961



5. Costruzione delle linee di curvatura di un ellissoide generico attraverso le proprietà degli ombelichi della superficie.



6. . Costruzione delle linee di curvatura dell'ellissoide tramite il metodo di Monge.

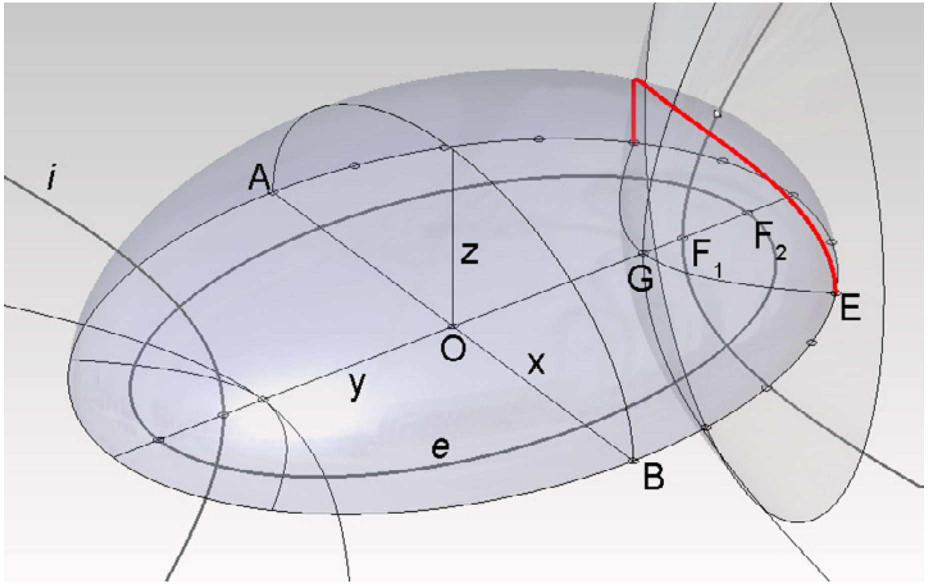
cando una dilatazione lungo la direzione dell'asse minore dell'ellisse di gola (fig. 3).
È possibile reiterare il procedimento per la costruzione dell'iperboloide ellittico a due falde[15].
Le curve intersezione dei due iperboloidi con l'ellissoide formano rispettivamente le due schiere di linee di curvatura comuni alle tre superfici (fig. 4).
Le linee di curvatura sull'ellissoide coprono tutta la superficie senza lacune, ad eccezione di quattro punti singolari, che sono i suoi quattro ombelichi, cioè i quattro punti in cui la direzione di curvatura è indeterminata (il valore delle curvature è lo stesso). Gli ombelichi dell'ellissoide sono dati dall'intersezione dell'iperbole focale con la superficie (punti **O₁**,**O₂**, **O₃**, **O₄** in fig. 5).
Nello spazio le linee di curvatura dell'ellissoide si comportano rispetto agli ombelichi come, nel piano, le ellissi si comportano rispetto ai fuochi. Infatti per tutti i punti di una stessa linea di curvatura, la somma delle distanze dagli ombelichi è costante. È possibile pertanto costruire le linee di curvatura dell'ellissoide attraverso il movimento di un punto, vincolato ad un filo di lunghezza assegnata, fisso negli ombelichi, che si muove rimanendo aderente alla superficie. Le due parti del filo a cavallo del punto mobile misurano la distanza più breve fra il punto e gli ombelichi e perciò sono geodetiche della superficie. La scelta delle coppie di ombelichi della superficie dà luogo ad una prima e a una seconda schiera di linee di curvatura.

APPARECCHIO DELLA VOLTA ELLISSOIDALE

La teoria delle linee di curvatura ha ricadute notevoli nelle arti, in particolare nella stereotomia della pietra. Le proprietà di queste linee permettono di soddisfare contestualmente alcune condizioni di vincolo, caratteristiche delle opere in pietra da taglio[16]. Queste riguardano in particolare la scelta delle superfici da impiegare nella progettazione dei conci e la loro reciproca disposizione. Si ricordano in sintesi: l'impiego di superfici semplici da realizzare; la condizione di perpendicolarità reciproca di spigoli e superfici del concio.
I conci venivano scolpiti a mano nella bottega del lapicida e perciò per garantire livelli di accuratezza soddisfacenti nella realizzazione, tanto le superfici di paramento quanto quelle di giunzione

ISSN 1828-5961

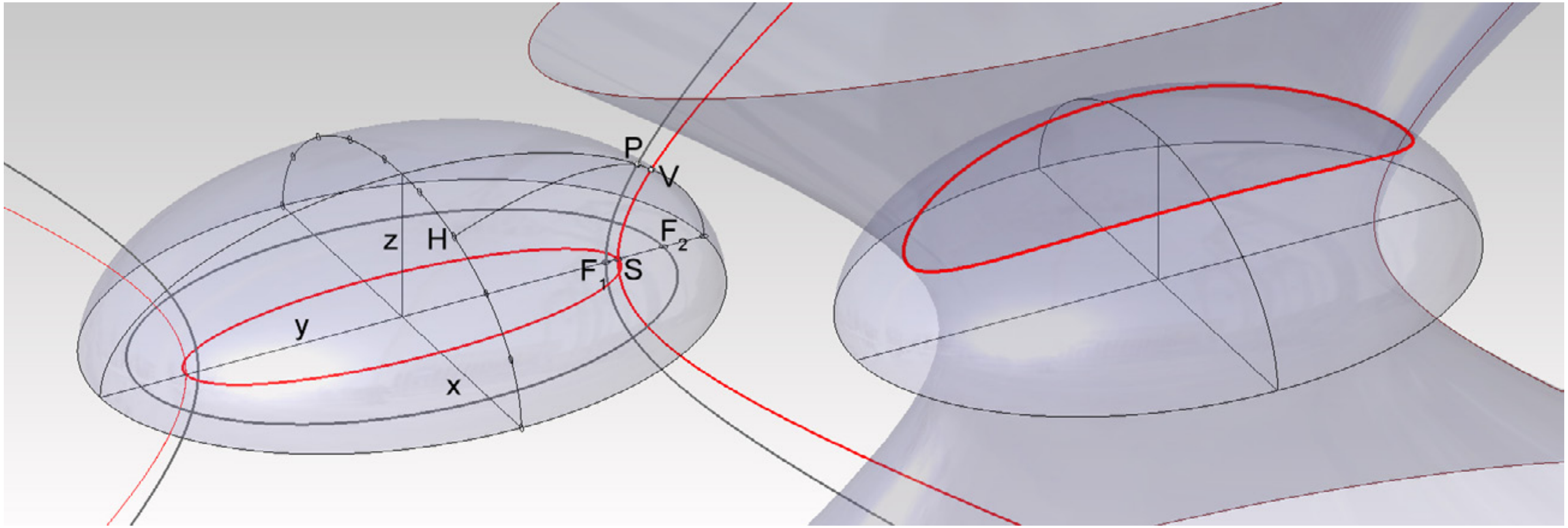
dovevano essere semplici da realizzare. In particolare queste ultime dovevano aderire al meglio con quelle dei conci contigui per evitare così fenomeni di fessurazione o rottura[17]. Si preferivano perciò le superfici piane, in alternativa, fra le curve, erano scelte le sviluppabili, poi le rigate, infine quelle a doppia curvatura[18].
Sviluppabili e rigate in particolare potevano essere riprodotte nell'officina del lapicida attraverso un'asta, che veniva usata come modano[19]. Le sviluppabili permettevano inoltre la realizzazione di panneaux, sviluppi piani delle superfici, realizzati in materiale duttile che venivano applicati sulla pietra per verificare la corretta esecuzione del taglio.
La ricerca della perpendicolarità fra le superfici e fra gli spigoli del concio è dovuta alla fragilità della pietra, che non consente la realizzazione di angoli particolarmente acuti. Se inoltre le superfici di uno stesso concio formassero angoli sensibilmente sproporzionati fra loro, questi resisterebbero in modo diverso alle sollecitazioni, e l'angolo acuto tenderebbe a rompersi compromettendo la stabilità dell'apparecchio[20].
Si consideri che in stereotomia queste condizioni sono auspicabili e non sempre contestualmente soddisfatte. Se si affronta poi il problema da punti di vista diversi da quello geometrico descrittivo non sempre il rispetto di queste condizioni di vincolo restituisce la tessitura ottimale per un dato apparecchio[21]. Ciò premesso, le linee di curvatura, le normali alla superficie condotte per queste linee e le superfici sviluppabili che da queste derivano, soddisfano contestualmente tutte queste condizioni[22].
La teoria mongiana delle linee di curvatura trova riscontro in un'applicazione all'architettura di pietra proposta dallo stesso Monge che riguarda la costruzione dell'apparecchio di una volta ellissoidale. La volta è presentata nel II chaier del Journal de l'École Polytechnique del 1796, ed è rivisitata da Leroy nel suo trattato di stereotomia[23].
Dovendo costruire la volta in conci di pietra, è conveniente che le linee di divisione dei conci siano costruite per mezzo delle linee di curvatura e che i giunti siano superfici sviluppabili normali all'intradosso della volta. Le linee di curvatura



7. Costruzione di una linea della prima curvatura attraverso le proprietà delle quadriche confocali.

tracceranno così sull'intradosso della volta degli elementi rettangolari.
La scelta della misura dell'asse principale verticale della superficie dell'ellissoide dipende da considerazioni progettuali estetiche e pratiche. Nel caso di studio presentato si prende in considerazione una volta ellissoidale ribassata con tre assi diversi[24].
Per costruire l'apparecchio ellissoidale tramite la rappresentazione matematica si è deciso di applicare la teoria delle quadriche confocali derivata dagli studi di Binet e di Dupin[25]. Prima di esporre il procedimento adottato vogliamo descrivere brevemente la soluzione grafica elaborata da Monge per costruire le linee di curvatura sull'ellissoide. Questa costruzione sfrutta le proprietà di simmetria e proiezione delle linee di curvatura. Infatti queste linee si proiettano sui piani principali della superficie stessa in coniche che hanno gli assi principali coincidenti con gli assi della superficie[26]. Monge adopera coniche ausiliare per trovare le coordinate degli assi principali delle diverse linee di curvatura nei diversi piani di rappresentazione: la pianta e i due alzati.
Consideriamo l'ellisse d'imposta **ABDE**, dove i segmenti **OA** e **OB** sono rispettivamente l'asse maggiore **y** e l'asse minore **x** dell'ellisse principale (fig. 5). Costruiamo i fuochi delle tre sezioni principali **F_1**, **F_2**, **F_3**. Adesso è necessario costruire l'ellisse e l'iperbole ausiliarie e ed i, i cui assi comuni sono **OP** e **OR**. Per costruire il primo asse si prendono le lunghezze **$OF_2'=OF_2$**, **$OF_1'=OF_1$**, poi si traccia la retta **AF_2'** e la parallela **$F_1'P$**. Per il secondo asse si prende **$OF_3'=OF_3$**, poi si traccia la retta **BF_3'** e la parallela **F_1R**. Consideriamo un punto qualsiasi **H** sull'iperbole ausiliaria i e riportiamo le coordinate di questo punto sugli assi **x** e **y**, questi forniscono i due semiassi dell'ellisse

ISSN 1828-5961



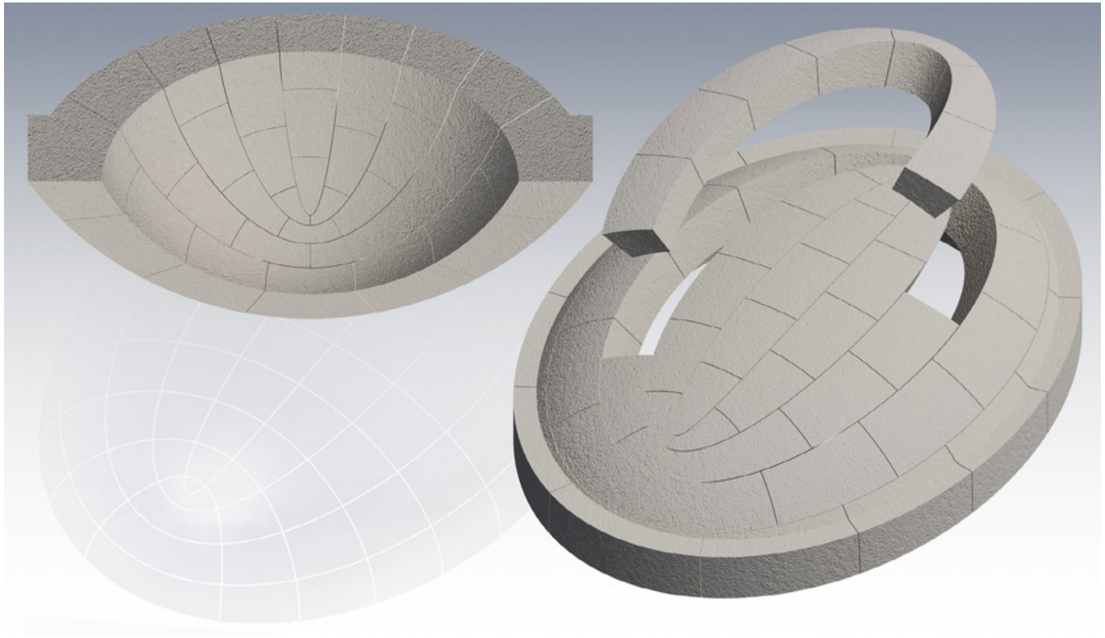
8. Costruzione di una linea della seconda curvatura attraverso le proprietà delle quadriche confocali.

f che rappresenta la proiezione d'una linea della prima curvatura. Allo stesso modo le coordinate di un punto **P** dell'ellisse ausiliaria **e**, forniscono i due semiassi dell'iperbole proiezione d'una linea della seconda curvatura. I punti **P** e **Q** sono la proiezione in pianta dei due ombelichi della superficie, cioè i punti in cui l'ellissoide presenta una curvatura uniforme in tutte le direzioni, simile a quella di una sfera. Lo stesso procedimento deve essere effettuato sull'alzato per ottenere le linee proiezioni delle linee di curvatura[27].
Naturalmente, per ragioni di carattere stereotomico, non è possibile tracciare in modo arbitrario le due serie di linee di curvatura[28]. Dobbiamo inizialmente dividere la semi-ellisse verticale **xz** in un numero dispari di parti uguali e trovare a ritroso le coordinate dei rispettivi punti. Lo stesso procedimento è riportato sul quarto **AB** dell'ellisse principale orizzontale.

Descriviamo ora l'intero procedimento per costruire l'apparecchio ellissoidale nel metodo della rappresentazione matematica. Consideriamo sempre l'ellisse principale orizzontale. Costruiamo i rispettivi fuochi **F₁** e **F₂** delle ellisse principali sui piani **xy** e **yz** (fig. 6). Costruiamo le coniche focali **i** ed **e** dell'ellissoide come descritto nel paragrafo precedente. Ora dividiamo l'arco **AB** dell'ellisse d'imposta in parti uguali. Vogliamo costruire una linea della prima curvatura che passi per il punto **E**. Costruiamo la sezione iperbolica orizzontale che passa per quel punto e ha come fuoco il punto **F₁** e come centro il punto **O**, centro dell'ellissoide. Costruiamo la sezione iperbolica verticale che ha come centro **O**, come fuoco **F₂** e come vertice il punto **G**. Costruiamo, come descritto precedentemente, l'iperboloide a due falde che ha come sezioni principali le iperboli suddette. L'intersezione della superficie dell'iperboloide con la superficie dell'ellissoide dà la linea della prima curvatura che passa per il punto **E**. Possiamo ripetere il procedimento per tutti i punti dell'ellisse sezione principale orizzontale e ottenere le linee della prima curvatura che formeranno gli spigoli di giunzione discontinua dei conci.
Costruiamo adesso una linea della seconda curvatura. Dividiamo l'arco ellittico verticale in un numero dispari di parti, nell'esempio illustrato nove parti. Per determinare una linea della seconda curvatura che passa per il punto **H** dobbiamo costruire l'iperboloide ad una falda confocale che passa per il punto **H** (fig. 7). Costruiamo allora la sezione principale iperbolica che sta sul piano **yz**. Per fare ciò applichiamo le proprietà che legano le linee di curvatura agli ombelichi dell'ellissoide. Costruiamo la geodetica che passa per il punto **H** dato e per il punto **P**, primo ombelico

ISSN 1828-5961

della superficie quadrica. Il punto **V** è il vertice della linea della seconda curvatura che passa per il punto **H**. Consideriamo la relazione seguente: **PQ - (PH+QH)= K**, dove **K** è una costante; allora la misura **K/2** ci dà la misura dell'arco conico **PV** nello spazio che appartiene alla sezione principale **yz**. Possiamo disegnare la sezione iperbolica confocale verticale che passa per il punto **V**; la curva è determinata dal punto **V**, dal fuoco **F_2** e dal centro **O**. La sezione ellittica **xy** dell'iperboloide confocale è determinata. Infatti la sezione iperbolica interseca l'asse **y** nel punto **S**, vertice dell'ellisse principale **xy**. Possiamo generare l'iperboloide ad una falda confocale che dà per intersezione la linea della seconda curvatura che passa per il punto **H**. Il procedimento può essere ripetuto per disegnare le altre linee della seconda curvatura.
In questo modo abbiamo ottenuto i due sistemi di linee di curvatura che danno luogo alla tessitura dell'apparecchio sull'intradosso della volta (fig. 8). La superficie di estradosso della volta è costituita da un altro ellissoide che ha il centro coincidente con la superficie d'intradosso. Le superfici di giunzione sono tutte costituite da superfici sviluppabili ortogonali alla superficie d'intradosso che passano per le linee di curvatura. Il disegno dei conci all'imposta è diverso per permettere il raccordo dell'apparecchio della volta con l'apparecchio murario.


9. Modello dell'apparecchio ellissoidale.

CONCLUSIONI

L'apparecchio della volta ellissoidale non trovò applicazioni nelle costruzioni. Quando infatti, con la scuola di Monge, la prassi stereotomica raggiunse il suo apice, supportata da una solida teoria geometrico-descrittiva, la pietra da taglio cominciava ad abbandonare i cantieri di architettura, sostituita da materiali più economici, come il cemento. Ciò nonostante i trattati di geometria descrittiva continuarono, sino ai primi anni del Novecento a dedicare ampio spazio ai problemi posti da questo genere di apparecchi.
Lo studio della volta ellissoidale mostra le proprietà notevoli delle linee di curvatura e le ricadute che queste ebbero, a partire dalla loro prima teorizzazione, nella costruzione degli apparecchi caratterizzati dalla divisione in elementi delle loro superfici.
La teoria delle linee di curvatura è ancora attuale oggi ed è applicata, per esempio, nello studio della tassellazione delle superfici free-form. La possibilità di costruire una rete di curve ortogonali fra di loro su di una superficie, coprendola senza lacune, rende queste curve particolarmente utili nella costruzione digitale delle mesh quadangolari[29].
Il caso della volta ellissoidale è risolto prima nel piano, con i metodi grafici della rappresentazione, poi nello spazio, con i metodi digitali della rappresentazione, avvalendosi delle proprietà delle quadriche confocali teorizzate da Binet e da Dupin. L'opportunità d'indagare direttamente nello spazio i problemi classici della geometria descrittiva si configura oggi come un'occasione di ricerca e di sperimentazione. L'uso del disegno digitale come strumento di conoscenza e verifica delle proprietà delle forme nello spazio può offrire oggi nuovi spunti e soluzioni semplici a problemi complessi del repertorio classico della geometria descrittiva. Agli strumenti tradizionali del disegno, il lapis, la riga e il compasso, si affiancano oggi gli strumenti informatici che, permettendo di rappresentare e perciò di conoscere le forme direttamente nello spazio, amplificano il valore di ricerca del disegno.
Il caso presentato è un piccolo esempio delle potenzialità euristiche che possono avere il disegno e l'attuale geometria descrittiva nel coniugare architettura e geometria.

ISSN 1828-5961

NOTE

[1] Negli ultimi anni ai tradizionali metodi grafici della rappresentazione si sono affiancati i metodi informatici della rappresentazione, che permettono di rappresentare nello spazio con livelli di accuratezza elevati. Fra questi possiamo riconoscerne due, che definiamo: *metodo della rappresentazione matematica e metodo della rappresentazione numerica*. Il metodo della rappresentazione matematica descrive le entità geometriche in modo continuo in ogni punto attraverso equazioni matematiche; il metodo della rappresentazione numerica descrive le entità geometriche in modo discreto, attraverso le coordinate nello spazio di un certo numero di punti. Per approfondimenti a riguardo si veda Cinti Luciani Stefano e Migliari, Riccardo (2009), Rappresentazione matematica, in Migliari, Riccardo, *Geometria Descrittiva - Metodi e costruzioni*, CittàStudi, Novara, vol.I, pp. 206-228.

[2] Si ricorda che il valore della curvatura di una linea in un punto è dato dall'inverso del raggio del cerchio osculatore.

[3] Si ricorda che il prodotto delle curvature principali di una superficie in un punto si chiama curvatura gaussiana e che questa fu definita appunto da Gauss nella prima metà dell'Ottocento.

[4] Ad eccezione dei punti ombelicali, dove le linee di curvatura possono presentare comportamenti singolari, perché le direzioni principali di curvatura sono indeterminate. Per approfondimenti si veda Hilbert, David e Cohn-Vossen, Stefan (2001), *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 238-251.

[5] Sebbene oggi le linee di curvatura trovino diverse applicazioni in architettura, in particolare per i problemi legati alla tassellazione delle superfici, sono ancora pochi i software in grado di rappresentare automaticamente questo genere di linee.

[6] Per approfondimenti si veda: Gremigni, Michele (1879), S*ulla teoria delle linee di curvatura. In Annali della scuola Normale Superiore di Pisa* - Classe di Scienze SI, vol.2. Pisa, pp. 237-239.

[7] Il testo citato, di Gaspard Monge, è tratto da Gremigni Michele, op. cit.

[8] Coniugando i suoi risultati con quelli conseguiti da Eulero vent'anni prima, Monge dimosta come i due punti in cui la normale ad una superficie curva incontra altre due normali alla superficie infinitamente vicine alla prima, siano i centri di curvatura della superficie nel punto considerato. Dimostra poi come le distanze da questi due punti a quello sulla superficie siano i raggi di curvatura della superficie nel punto. E ancora come le direzioni perpendicolari secondo cui si passa dalla normale nel punto alle due normali consecutive che la intersecano, siano le direzioni di curvatura della superficie nel punto. Attraverso il movimento di un punto sulla superficie lungo le sue direzioni principali di curvatura, definisce due schiere di linee, che chiama linee di curvatura, che sono perpendicolari fra loro e che dividono perciò la superficie in elementi rettangolari. Se la normale ad una superficie curva percorre una linea di curvatura mantenendo la condizione di perpendicolarità alla superficie, questa forma una superficie sviluppabile, costantemente perpendicolare alla superficie curva, che la seziona appunto secondo una sua linea di curvatura. Si ottengono due schiere di superfici sviluppabili normali alla superficie curva, tali che ognuna di quelle di una schiera incontra tutte quelle dell'altra, secondo linee rette e ad angolo retto. Tutte queste superfici sviluppabili dividono lo spazio in elementi, indefiniti nel verso della lunghezza della normale, delimitati da quattro superfici perpendicolari fra loro e da quattro spigoli retti di lunghezza indefinita. Si veda Monge, Gaspard (1796), *Analyse appliquée à la géométrie*, in Journal de l'*École polytechnique*, chaier II, Imprimerie de la République, Paris, pp.145-149.

[9] Si veda Leroy, Charles François Antoine (1864), *Traité de géométrie descriptive*, Gauthier Villars, Paris, p.299.

[10] La questione delle quadriche confocali, argomento ampiamente trattato dal punto di vista della matematica, è descritta da un punto di vista geometrico-descrittivo nelle lezioni tenute nel 1920-21 da David Hilbert a Gottinga. Le considerazioni che seguono sono tratte da questo ciclo di lezioni. Si veda Hilbert, David e Cohn-Vossen, Stefan, op. cit., pp. 28-36 e 238-251.

[11] Si ricorda che ogni superficie quadrica gode della proprietà di avere tre assi perpendicolari fra loro che passano per il suo centro; coppie di assi principali determinano i piani di simmetria ortogonale delle superficie, chiamati piani principali.

[12] Una costruzione semplice permette di determinare i fuochi di un'ellisse noto il centro e gli assi; i fuochi sono dati dall'intersezione dell'asse maggiore ellisse con una circonferenza che ha centro su un estremo dell'asse minore e raggio pari al semiasse maggiore.

[13] Si osservi che nel caso dell'iperbole i modellatori matematici costruiscono la curva attraverso le lunghezze dell'asse coniugato e dell'asse trasverso. La prima lunghezza corrisponde alla distanza del centro della conica da un vertice, la seconda lunghezza è data dalla differenza dei quadrati della distanza del centro da un fuoco e da un vertice.

[14] Schiere di superfici confocali coprono lo spazio senza lacune.

[15] Nel caso dell'iperboloide a due falde le sezioni principali sono iperboli tanto nel piano yz, quanto nel piano xy, l'una confocale con l'iperbole focale, l'altra confocale con l'ellisse focale.

[16] Monge in *Géométrie Descriptive* sintetizza i principi della progettazione stereotomica e le relative condizioni di vincolo. Si veda: Monge, Gaspard (1799) *Géométrie descriptive.* Riproduzione anastatica (1989), Jacques Gabay, Sceaux, pp. 124-127.

[17] Gli apparecchi in pietra da taglio sono di norma posati a secco. Nelle opere realizzate che ci sono pervenute si trova spesso traccia di leganti, il cui solo scopo era quello di spianare le superfici di giunzione per farle aderire al meglio le une contro le altre.

[18] Si veda Salvatore, Marta (2009), *Stereotomia*, in Migliari, Riccardo, *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, vol. 2, pp. 485-523.

[19] Le superfici rigate debbono il loro nome alla notevole caratteristica di poter appoggiare su di esse, in tuta la sua lunghezza, una riga; ovvero è possibile trovare su di esse almeno una famiglia di rette. Le superfici generata dal movimento di una retta danno luogo a due grandi famiglie di superfici con proprietà differenti: le superfici sviluppabili, che hanno la proprietà di poter essere sviluppate nel piano senza strappi e sovrapposizioni e le superfici rigate sghembe che non possono essere sviluppate. Le superfici rigate sghembe, come l'iperboloide ad una falda, hanno curvatura gaussiana negativa, mentre le superfici sviluppabili, come il cono e il cilindro, hanno curvatura gaussiana nulla. Quindi, da un punto di vista della curvatura, le superfici sviluppabili hanno le stesse proprietà di un piano. Questa particolare proprietà le rende particolarmente adatte ad essere impiegate nella costruzione architettonica. Si veda Fallavollita, Federico (2009), Le superfici rigate, in Migliari, Riccardo, *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, vol. 2, pp. 153-224.

[20] Si veda Monge, Gaspard, op. cit.

[21] Si veda a riguardo Sakarovitch, Joel (2009), *Gaspard Monge founder of constructive geometry*, in Kurrer, Karl-Eugen e Lorenz, Werner e Wetzk, Volker (a cura di) *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*, Neunplus, Berlino, pp. 1293-1299.

[22] Prima della teorizzazione mongiana delle linee di curvatura, la perpendicolarità fra tutte superfici di un concio si riscontrava in casi semplici relativi di norma alle superfici di rivoluzione. In una superficie di rivoluzione infatti le linee di curvatura coincidono con le direttrici e le generatrici della superficie.

[23] L'apparecchio è rivisitato anche da Jean Pierre Nicolas Hachette, che lo pubblica nel suo *Traité de géométrie descriptive* del 1822.

[24] Possono darsi tre casi: nel primo caso l'asse **z** è più grande degli altri due assi (**x** e **y**) e allora la volta è rialzata; nel secondo caso l'asse **z** è uguale all'asse medio della superficie e allora la volta è chiamata *voûte moyenne*; nell'ultimo caso l'asse **z** è più piccolo e allora la volta è ribassata. La vota rialzata è adatta a spazi di grandi dimensioni, perché le dimensioni tendono ad accorciare la percezione effettiva dell'altezza della copertura. La volta ribassata invece, è adatta a spazi dove l'acustica è importante, perché tende a disperdere meno il suono dell'oratore. Oltre a queste considerazioni generali d'impianto, Monge suggerisce l'utilizzo dei punti ombelicali per sistemare eventuali fonti di illuminazione dello spazio.

[25] Si veda Hilbert, David e Cohn-Vossen, Stefan, op.cit.

[26] Le linee di curvatura dell'ellissoide sono curve del quarto ordine che appartengono a un sistema di quadriche perpendicolari fra loro. Le curve del quarto ordine formate dall'intersezione di quadriche aventi piani principali comuni, sono simmetriche rispetto a questi piani e si proiettano su di loro secondo coniche.

[27] La costruzione riportata è di Charle François Antoine Leroy; il metodo è analogo a quello di Monge.

[28] Le dimensioni dei conci della volta devono infatti avere una certa coerenza nelle dimensioni, e perciò seguire, almeno su due delle sezioni principali della volta una divisione in parti uguali.

[29] Si veda a riguardo Zadravec, Mirko e Schiftner, Alexander e Wallner Johannes (2010), *Designing Quad-dominant Meshes with Planar Faces*, in Computer Graphics Forum, vol.29, n.5.

ISSN 1828-5961

BIBLIOGRAFIA

Cinti Luciani, Stefano e Migliari, Riccardo (2009), *Rappresentazione matematica*, in Migliari, Riccardo, *Geometria Descrittiva - Metodi e costruzioni*, CittàStudi, Novara, vol.I, pp. 206-228.

Hilbert, David e Cohn-Vossen, Stefan (2001), *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 19-36 e 238-251.

Fallavollita, Federico (2009), *Le superfici rigate*, in Migliari, Riccardo, *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, vol. 2, pp. 153-224.

Gremigni, Michele (1879), *Sulla teoria delle linee di curvatura*. In Annali della scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze SI, vol.2. Pisa, pp. 237-284.

Hachette, Jean Pierre Nicolas (1822), *Traité de géométrie descriptive*, Corby, Paris, pp. 291-293.

Leroy, Charles François Antoine (1862), *Traité de stéréotomie*, Mallet-Bachelier, Paris, pp. 254-256.

Leroy, Charles François Antoine (1864), T*raité de géométrie descriptive*, Gauthier Villars, Paris, pp. 289-292.

Migliari, Riccardo (2012), *La geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale*, in Carlevaris, Laura e De Carlo, Laura e Migliari, Riccardo (a cura di), Attualità della geometria descrittiva, Gangemi, Roma, pp. 15-42.

Monge, Gaspard (1796), *Analyse appliquée à la géométrie,* in Journal de l'École polytechnique, chaier II, Imprimerie de la République, Paris, pp. 145-165.

Monge, Gaspard (1799), *Géométrie descriptive*. Riproduzione anastatica (1989), Jacques Gabay, Sceaux, 119-127.

Monge, Gaspard (1809), *Application de l'analyse à la géométrie*, Bernard, Paris, pp. 121-159.

Sakarovitch, Joel (2009), *Gaspard Monge founder of constructive geometry*, in Kurrer, Karl-Eugen e Lorenz, Werner e Wetzk, Volker (a cura di) *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*, Neunplus, Berlino, pp. 1293-1299.

Salvatore, Marta (2009), *Stereotomia*, in Migliari, Riccardo, *Geometria descrittiva – Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, vol. 2, pp. 485-523.

Zadravec, Mirko e Schiftner, Alexander e Wallner Johannes (2010), *Designing Quad-dominant Meshes with Planar Faces*, in Computer Graphics Forum, vol.29, n.5, http://www.geometrie.tugraz.at/wallner/vfdesign.pdf