



Leonardo Paris

Architetto, Ph.D e Professore Associato della Sapienza di Roma nel SSD del Disegno. Membro del Critivat, centro di ricerca interdipartimentale. Insegna nella sede distaccata di Rieti ed ha interessi scientifici nella geometria descrittiva e nel rilievo digitale integrato sperimentando le più moderne tecniche di rilevamento.

Geometrie coniugate *Conjugated geometries*

Lo studio degli ingranaggi si basa sulle geometrie coniugate in cui due curve o due superfici si mantengono costantemente in contatto pur se in movimento reciproco. La teoria geometrica degli ingranaggi fino alla fine del XIX secolo era uno dei molteplici rami nelle applicazioni della Geometria Descrittiva. Lo studio si basa sulla conoscenza delle principali proprietà delle curve piane e gobbe e delle loro derivate. La specificità del tema è che queste geometrie nel momento in cui si devono relazionare con le loro coniugate, devono rispettare dei vincoli che altrimenti non avrebbero. Si vuole evidenziare attraverso casi concreti il ruolo della geometria descrittiva nel passaggio dal teorico al pratico riproponendo in chiave informatica, temi e procedure di indagine spesso passati in secondo piano se non addirittura dimenticati.

The study of the gears is based on the conjugated geometries in which two curves or two surfaces are maintained in constant contact even if in mutual movement. The geometric theory of the gears until the end of the nineteenth century was one of many branches in the applications of descriptive geometry. The study is based on knowledge of the main properties of plane curves and humps and their derivatives. The specificity of the theme is that these geometries when you have to relate with their conjugated, must meet the constraints that would otherwise not have. We want to highlight through case studies the role of descriptive geometry in the transition from the theoretical to the practical reinventing key information, issues and procedures of investigation often passed into the background if not forgotten.

Parole chiave: geometrie coniugate, geometria descrittiva, ingranaggi, curve, superfici, modellazione informatica

Keywords: conjugated geometries, descriptive geometry, gears, curves, surfaces, 3d modelling

INQUADRAMENTO GENERALE

Un interessante campo di studio in cui il rapporto tra la costruzione geometrica teorica e la funzione fisico-pratica è indissolubile è quello degli ingranaggi, meccanismi elementari costituiti da ruote dentate cui spetta il compito di trasmettere un movimento.

Lo studio degli ingranaggi si basa sulle cosiddette *geometrie coniugate* in cui due curve o due superfici si mantengono costantemente in contatto pur se in movimento reciproco.

Negli ingranaggi vi è una componente dinamica che è strettamente connessa alla configurazione geometrica dei singoli elementi che compongono l'ingranaggio; ogni singolo elemento a sua volta si compone di geometrie composte e complesse sia nel corpo centrale che nei "denti" di incastro. Fino alla fine del XIX secolo questo particolare campo di applicazione basato sullo studio delle geometrie coniugate era noto come *teoria geometrica degli ingranaggi* e rappresentava uno dei molteplici rami nelle applicazioni della Geometria Descrittiva. Ricordiamo che la Geometria Descrittiva tra la fine dell'800 e per gran parte del '900 ha rappresentato un corpus disciplinare fondamentale per l'architetto, per l'ingegnere e per il designer del prodotto, basata su teorie, tecniche e metodi di analisi, conoscenza e rappresentazione della forma strettamente legate all'ambito applicativo e pratico. Pensiamo per esempio allo studio dei sistemi voltati, delle strutture reticolari, dei tetti o anche allo studio del taglio della pietra e del legno.

Negli ultimi anni del secolo scorso la disciplina, grazie anche alle importanti novità introdotte dalla modellazione informatica, ha subito un profondo mutamento che investendo prima di tutto le modalità di rappresentazione dello spazio e delle forme tridimensionali ha pian piano contribuito ad alimentare anche un diverso processo mentale di elaborazione e quindi di invenzione delle forme.

Un'altra importante conseguenza scaturita dalla rivoluzione informatica applicata alla Geometria Descrittiva è quella di aver facilitato il recupero di alcuni temi specifici che nel corso del '900, relegati in contesti di nicchia, sono andati progres-

sivamente scomparendo dal panorama del processo formativo degli architetti e degli ingegneri¹. Uno di questi settori è appunto quello della teoria geometrica degli ingranaggi.

Negli ingranaggi la trasmissione del movimento, con rapporto costante o variabile, avviene attraverso delle ruote dentate che devono conservarsi a contatto durante la loro rotazione; quando le superfici dei denti di due ruote di un ingranaggio soddisfano questa condizione si dicono *coniugate*. Nella configurazione e nella funzionalità degli ingranaggi vi è prima di tutto un problema di forma e di posizione che è possibile risolvere solo attraverso lo studio della *geometria*.

Lo studio delle geometrie coniugate si basa innanzi tutto sulla conoscenza delle principali proprietà delle curve piane e di quelle gobbe per arrivare ad indagare alcune particolari famiglie di curve, le cosiddette derivate, quali per esempio le evolventi o le cicloidi.

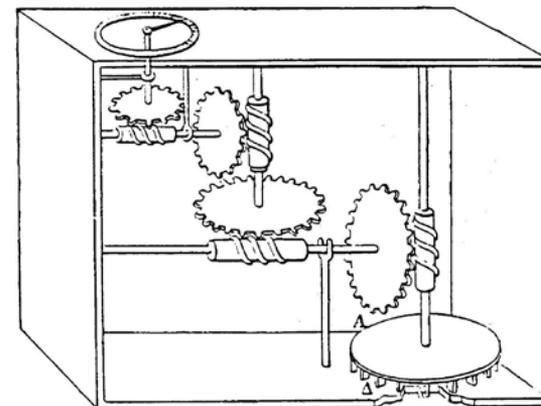
La specificità del tema (e anche il suo fascino) è che queste geometrie nel momento in cui si devono relazionare con le loro coniugate, si trovano nella condizione di dover rispettare dei vincoli che altrimenti non avrebbero.

Nelle geometrie coniugate inoltre si individuano degli ulteriori vincoli che non sono solo quelli di contatto ma sono anche vincoli di carattere topologico; si devono cioè verificare le condizioni di non interferenza tra i profili delle diverse ruote dentate per ricavare il dimensionamento ottimale, a volte obbligato, degli stessi denti.

CENNI STORICI

Occorre sottolineare la differenza tra ingranaggi e teoria geometrica degli ingranaggi.

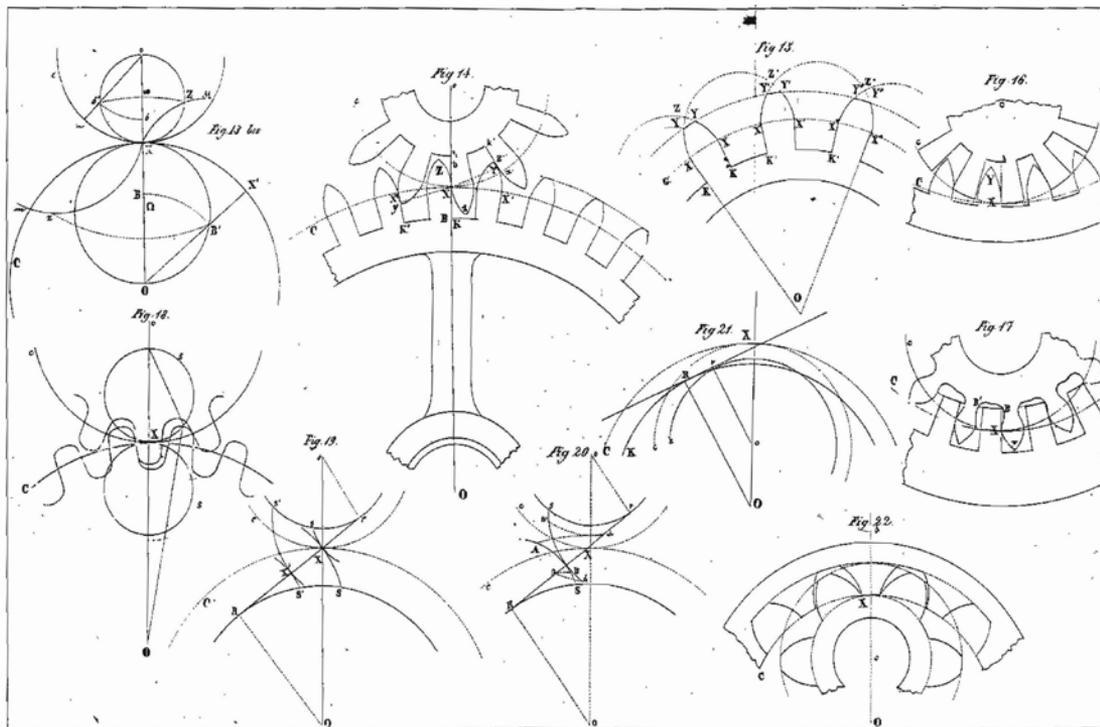
Nel primo caso si fa riferimento a meccanismi conosciuti da millenni legati molto spesso al trasporto di cose o persone o a sistemi di trasmissione del movimento. Uno studio specifico e dettagliato con l'individuazione di alcuni organi meccanici come le ruote, le leve, le pulegge, lo si deve in epoca ellenistica ad Erone di Alessandria, con la descrizione per esempio del misuratore di distanza chiamato odometro, che si avvaleva appunto di ingranaggi (fig. 1). Molto noti sono gli ingranaggi, spesso basati su ruote dentate, per il



1. Ricostruzione grafica dell'odometro di Erone di Alessandria.

pompaggio dell'acqua nei mulini di epoca greco-romana. Il primo vero studioso di ingranaggi è senza dubbio Leonardo da Vinci al quale si devono numerose descrizioni e graficizzazioni del problema che è alla base della concatenazione dinamica di più elementi.

Se invece parliamo di ricerche geometriche degli ingranaggi, quelle cioè che sono alla base di una vera e propria teoria geometrica, allora occorre citare come uno dei maggiori precursori il matematico Philippe de La Hire (1640 – 1718) al quale si devono descrizioni sulle proprietà delle epicicloidi piane applicate agli ingranaggi per la costruzione esatta dei profili dei denti.



2. Costruzione grafica di ruote dentate, dal trattato di Giovanni Codazza, *Teoria geometrica degli ingranaggi*, Milano 1854.

Il primo trattato teorico sugli ingranaggi lo si deve a Charles Etienne Louis Camus (1699 – 1768) cui sono seguiti i contributi di molti grandi matematici e geometri del '700 e dell'800 quali Eulero, Hachette, Lefebvre, Olivier. A quest'ultimo si deve la pubblicazione a Parigi nel 1842 dell'opera *Théorie géométrique des engranages*.

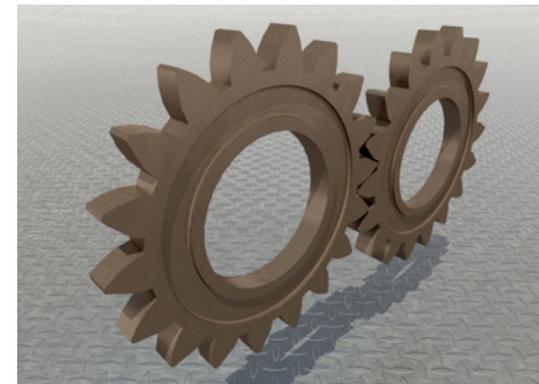
Uno dei trattati italiani più importanti e completi è *La Teoria geometrica degli ingranaggi* di Giovanni Codazza², pubblicato a Milano nel 1854 (fig. 2), cui segue alcuni anni più tardi il primo dei tanti contributi di Domenico Tessari a cavallo del nuovo secolo³. Secolo in cui, a seguito dell'enorme progresso soprattutto tecnologico unito allo

sviluppo sempre più specifico delle macchine di precisione, lo studio geometrico degli ingranaggi si è progressivamente distaccato dal fondamentale tronco della Geometria Descrittiva.

DEFINIZIONI SUGLI INGRANAGGI

L'ingranaggio è un meccanismo elementare costituito da una ruota dentata che ingrana con un'altra ruota dentata o con una cremagliera o con una vite senza fine allo scopo di trasmettere un movimento⁴.

Gli ingranaggi possono essere utilizzati per trasmettere il moto rotatorio fra due o più assi, o per convertire il moto rotatorio in moto progressivo;



3. Un ingranaggio a ruote dentate. Modello di Leonardo Paris, render di Wisam Wanbeh.

in questo caso sono organi meccanici studiati nella cinematica, cioè nella teoria dei meccanismi. Nel caso in cui gli ingranaggi vengono utilizzati per trasmettere l'azione di un motore ai diversi meccanismi destinati a produrre un determinato effetto meccanico, lo studio fa parte della dinamica delle macchine, attraverso cui si valuta la porzione di lavoro consumata dall'attrito durante la trasmissione del movimento.

Su questi presupposti particolare importanza riveste lo studio delle forme geometriche dei denti, affinché la trasmissione del moto avvenga nelle condizioni più favorevoli a raggiungere la soluzione del problema dinamico. Negli ingranag-

gi la trasmissione del movimento avviene attraverso delle ruote dentate. In questa trasmissione di moto gli assi possono essere: *paralleli, concorrenti o sghembi*.

In ciascun caso può verificarsi che il rapporto tra le velocità angolari rimanga costante oppure variabile. Nel primo caso si hanno gli ingranaggi a *rapporto di velocità costante*; nel secondo caso gli *ingranaggi a rapporto di velocità variabile*.

Un requisito fondamentale nella identificazione delle superfici dei denti è che queste debbono conservarsi a contatto durante il movimento rotatorio delle ruote; quando le superfici dei denti di due ruote di un ingranaggio soddisfano questa condizione di dicono coniugate (figura 3).

E' sotto questo aspetto che il problema degli ingranaggi è un problema di relazione di forma e posizione e quindi è un problema geometrico.

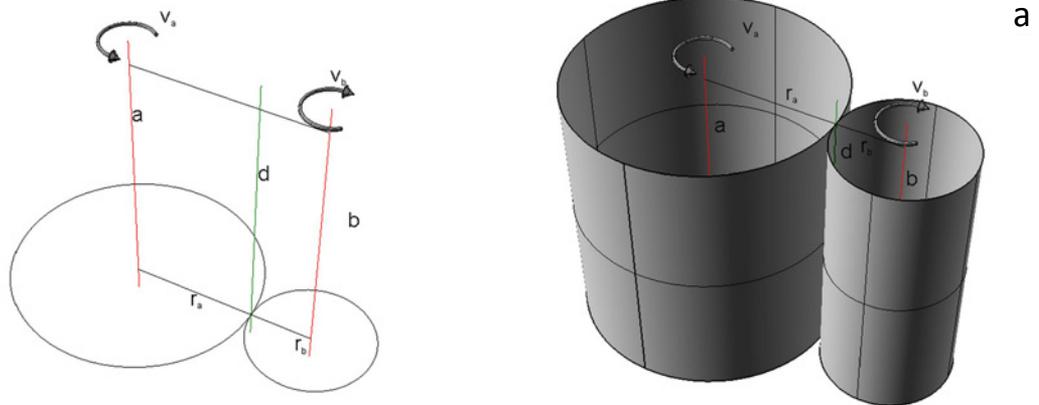
In un ingranaggio le superfici dei denti possono venire a contatto secondo una linea o conservarsi progressivamente a contatto in un punto. Nel primo caso l'ingranaggio si definisce di *forza*, nel secondo di *precisione*.

Un altro elemento che concorre a definire il tipo di ingranaggio è quello dell'attrito cioè della forza dissipativa che si esercita tra due superfici a contatto e che si oppone al loro moto relativo. Sui concetti riguardanti l'attrito non essendo di interesse per l'argomento qui trattato si rimanda a testi specifici.

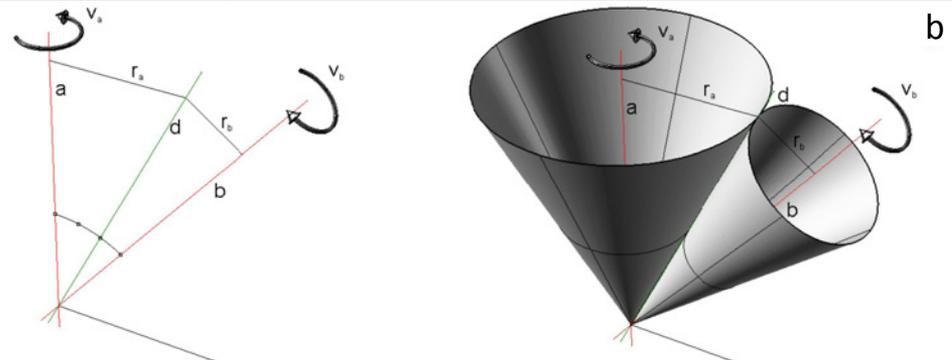
Parlando di ingranaggi si è più volte fatto riferimento ai denti che rappresentano il vero e proprio elemento di contatto e di trasmissione del moto. La dentatura di un ingranaggio può essere esterna, interna o laterale. Il primo caso è la disposizione classica che dà all'ingranaggio una forma raggiata, con i denti rivolti verso l'esterno. Nel secondo caso questa disposizione lascia il bordo esterno liscio, mentre nella parte interna sono presenti gli ingranaggi diretti verso l'asse. Vi sono infine anche denti disposti lateralmente; questa disposizione fa assumere all'ingranaggio una forma simile a una corona di un re.

Gli ingranaggi si possono classificare sia in funzione della disposizione reciproca degli assi sia in funzione della disposizione della dentatura, per cui si ottengono per esempio le ruote dentate

a – b ; assi paralleli; cilindri circolari retti



a – b ; assi concorrenti; coni circolari retti



4a e 4b. Superfici primitive con assi paralleli e concorrenti.

semplici, elicoidali, a doppia elica, le ruote coniche a denti dritti o a corona ipoide, il rocchetto o cremagliera, la vite senza fine o ingranaggi non circolari.

LE GEOMETRIE CONIUGATE

Come detto in premessa lo studio degli ingranaggi deriva dallo studio di specifiche forme geometriche che muovendosi devono mantenere determinate caratteristiche e rispettare vincoli e limiti imposti dal loro stesso movimento.

Due curve che durante il moto si mantengono costantemente in contatto si definiscono *profili coniugati*. Questi profili pertanto si basano su costruzioni geometriche che a loro volta definiscono il campo delle *geometrie coniugate*.

Non si vuole proporre di seguito un trattato sulle geometrie coniugate che, come si può immaginare, prevede un'ampia ed articolata casistica che deriva dai molteplici tipi di ingranaggi realizzabili. Si vogliono esporre sinteticamente alcune interessanti applicazioni con lo scopo di dimostrare

quanto la geometria pur nella sua astrazione sia in questo caso specifico indissolubile all'elemento fisico e materiale. Si vuole anche dimostrare quanto l'uso di modellatori matematici, sia nella rappresentazione sul piano che nella modellazione tridimensionale, abbia rivoluzionato la rappresentazione dei fenomeni e quindi conseguentemente abbia prodotto anche un nuovo modello di comprensione e di verifica quasi di tipo sperimentale attraverso l'utilizzo di un vero e proprio laboratorio virtuale.

Gli argomenti che verranno spiegati di seguito come esemplificazione sono due. Il primo riguarda alcune considerazioni di carattere generale sulla scelta delle cosiddette superfici primitive che costituiscono il nucleo di un ingranaggio; il secondo riguarda invece uno studio specifico per la costruzione geometrica del profilo dei denti di due ruote dentate ad assi paralleli.

Le ruote dentate servono a trasmettere il moto di rotazione fra due assi di due superfici munite di denti. La posizione reciproca tra gli assi delle due ruote definisce il tipo di ingranaggio che può essere con assi paralleli, concorrenti o sghembi.

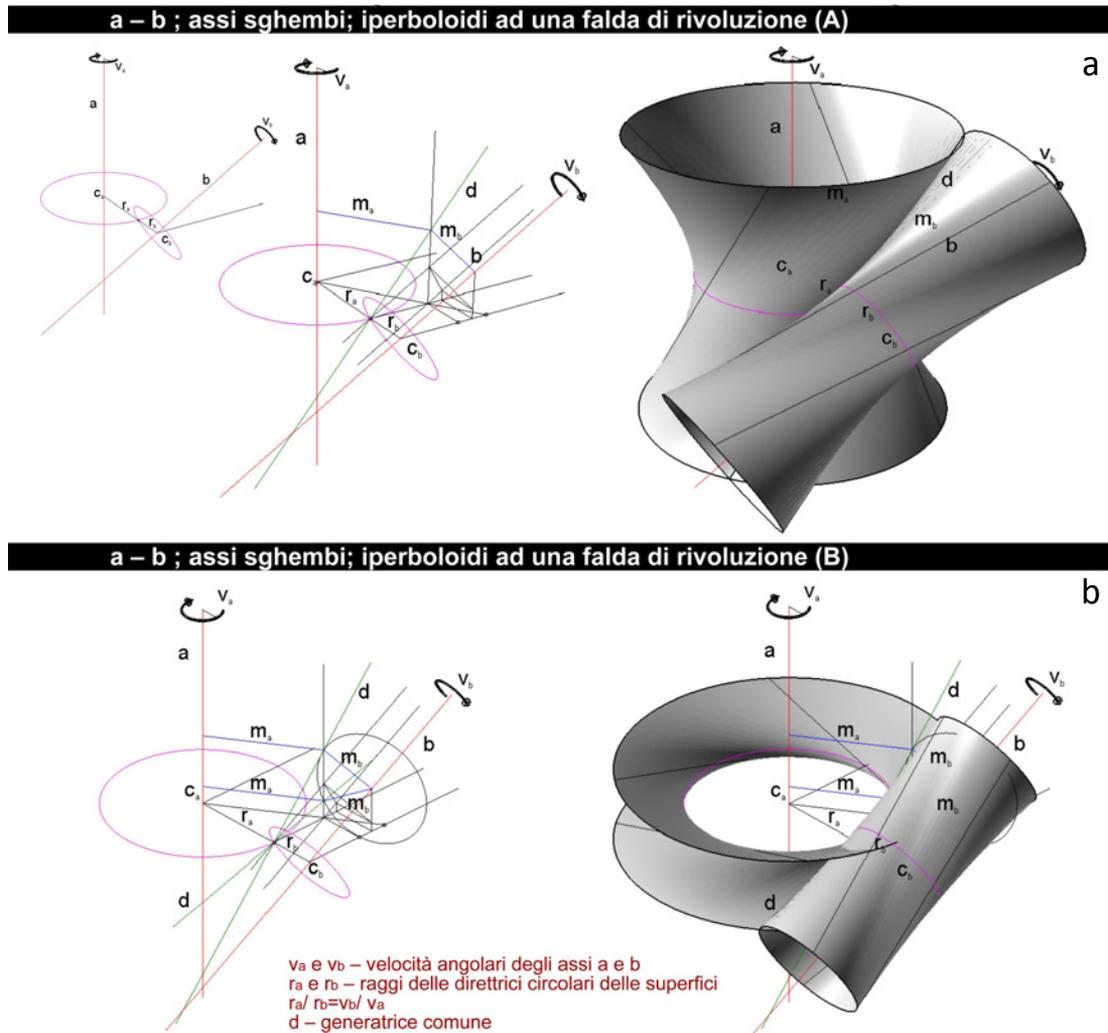
Nel movimento rotatorio della superficie entra in gioco la velocità, definita dalla cosiddetta velocità angolare che generalmente è costante ma che può essere anche di tipo variabile.

Ad esempio, nel caso più usato di ingranaggi a velocità costante bisogna prima di tutto individuare una coppia di superfici che possano conservarsi a contatto potendo in via teorica trasmettere il moto rotatorio muovendosi una sull'altra senza l'aiuto dei denti con velocità costanti uguali o diverse tra loro.

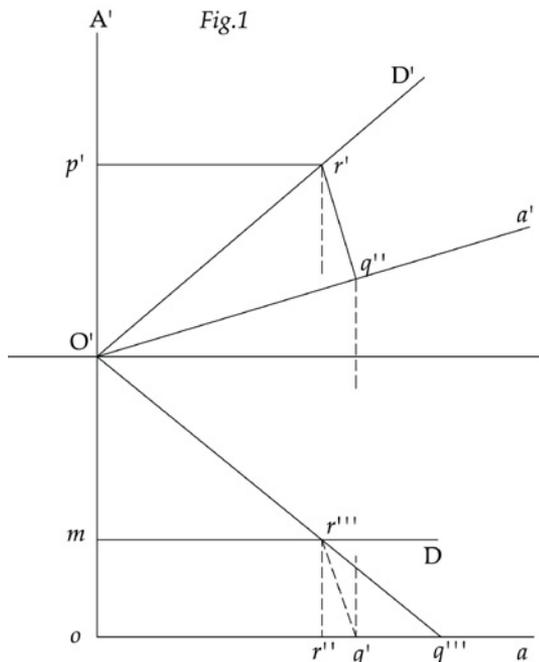
Queste superfici vengono definite appunto primitive e quanto di seguito riportato deriva da una rilettura di uno dei primi capitoli del trattato di Giovanni Codazza, rispetto al quale per facilità di lettura si ripropone la casistica nell'ordine inverso, dal più semplice, cioè quello delle superfici ad assi paralleli, al più complesso, con gli assi sghembi.

Nel caso di superfici ad assi paralleli le primitive sono due cilindri circolari retti (fig. 4 a).

In figura è illustrato il caso di due cilindri con assi a e b le cui direttrici circolari hanno rispettiva-



5a e 5b. Superfici primitive con assi sghembi.

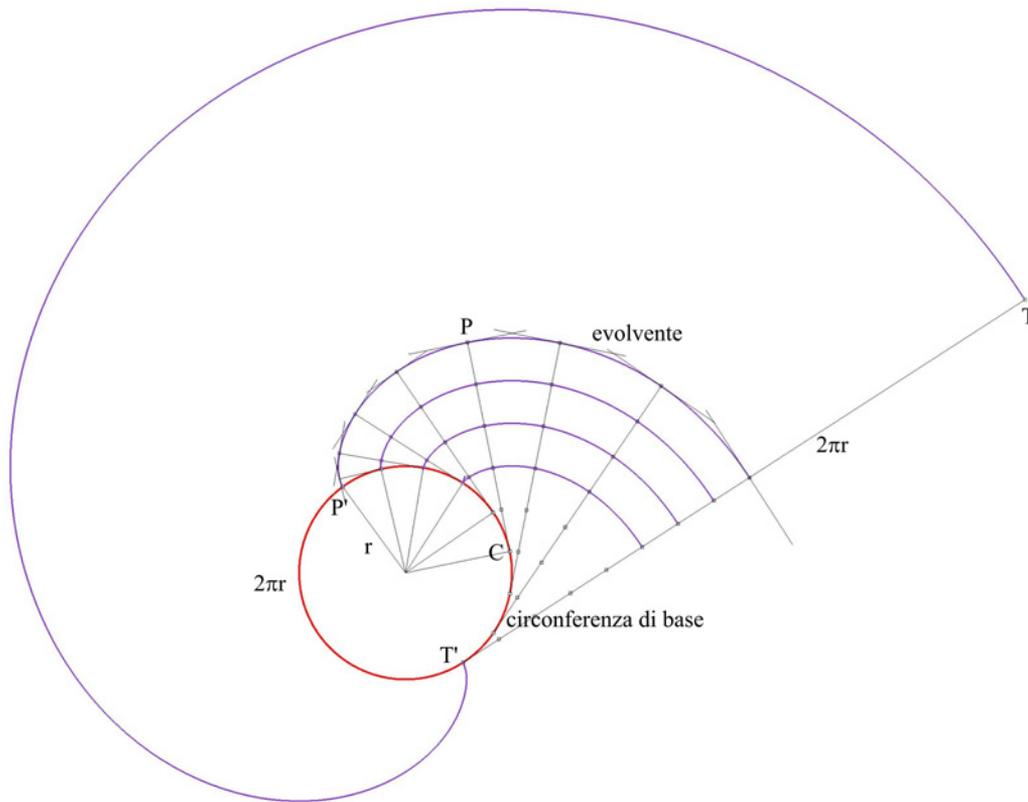


5. Illustrazione (rielaborata dall'autore) del trattato di Codazza riferita al caso di superfici primitive con assi sghembi.

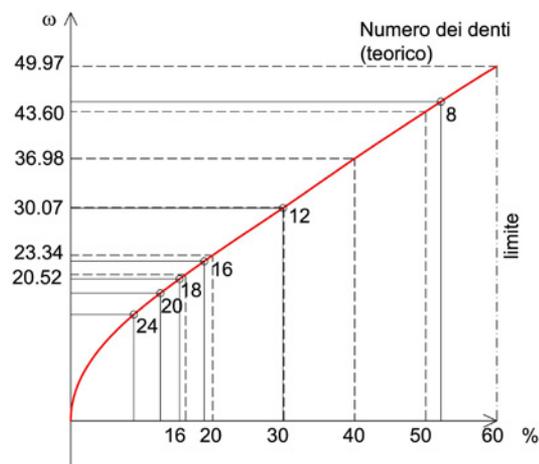
mente raggio r_a e r_b . La retta d è la generatrice comune ai due cilindri durante la rotazione. V_a e V_b sono le velocità angolari il cui rapporto è l'inverso del rapporto tra i rispettivi raggi. Nel caso illustrato i due cilindri sono esterni ma può verificarsi anche il caso in cui il secondo cilindro sia interno al primo. In questo caso le ruote saranno una con dentature interne e l'altra esterne. Se gli assi delle superfici sono concorrenti le primitive sono due coni circolari retti che si mantengono in contatto nella loro rotazione lungo la generatrice comune d (fig. 4 b). Anche in questo caso il secondo cono può essere esterno o interno al primo. Il caso geometricamente più interessante è quello in cui gli assi delle due superfici coniugate

sono tra loro sghembi (fig. 4 c). Date due rette sghembe a e b occorre individuare prima di tutto la distanza tra le due rette da suddividere in due segmenti inversamente proporzionali alle velocità angolari delle due superfici primitive. I due segmenti r_a e r_b sono i raggi delle due circonferenze di gola degli iperboloidi. Il punto di contatto delle due circonferenze è un punto della retta d cercata, cioè la generatrice di entrambe le superfici di rivoluzione. La retta d è anche il luogo

dei punti equidistanti da a e b . Per cui attraverso una costruzione geometrica che è riportata anche nella costruzione nelle doppie proiezioni ortogonali da Codazza si individua nello spazio uno degli infiniti punti tale che le due distanze ma e mb abbiano lo stesso rapporto r_a / r_b . Si dimostra facilmente come il problema, risolvibile per superfici esterne o interne, ammetta due soluzioni (fig. 4 d). Tutta la disamina del problema geometrico svi-

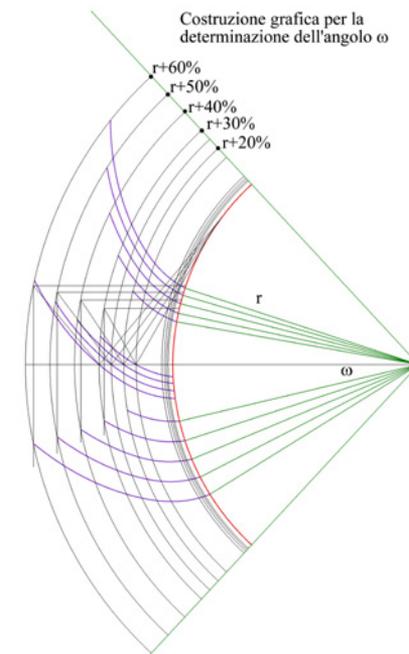


6. L'evolvente della circonferenza.



8. Diagramma per il calcolo teorico della circonferenza di testa in funzione al numero di denti della ruota.

9. Costruzione grafica per il calcolo dell'angolo ω in funzione del rapporto tra il raggio della circonferenza di testa e della circonferenza di base.



cioè il segmento TT' è uguale a $2\pi r$.

Senza addentrarci ora in considerazioni di tipo matematico vogliamo ora sperimentare per via grafica attraverso un modellatore matematico le specificità di questa curva in relazione ad un preciso compito che gli viene assegnato cioè quello di imprimere al profilo coniugato un movimento rotatorio; si vogliono qui definire alcune proprietà per via induttiva anziché deduttiva.

Prima di tutto occorre limitare il campo di azione dinamico della evolvente e questo lo si può fare individuando quella che viene definita la *circonferenza di testa* il cui raggio r_t avrà un certo rapporto con il raggio della *circonferenza di base* r_b , il cui valore è sempre > 1 . Vedremo come questo valore ritornerà utile in seguito per la risoluzione grafica di un altro problema.

Introduciamo ora un profilo coniugato riferito

all'altra ruota dell'ingranaggio (fig. 7 a); per semplicità lo consideriamo con una circonferenza di base di uguale raggio che andrà collocato tangente alla circonferenza di testa del primo ingranaggio. Poiché la seconda ruota ha una circonferenza di base uguale, anche la seconda evolvente sarà uguale alla prima.

Nello schema geometrico si riconoscono le due circonferenze di base, la retta congiungente i due centri C_1C_2 che contiene il segmento H_1H_2 distanza tra le due circonferenze di base, i due profili coniugati, cioè le evolventi a ciascuna delle circonferenze, che si incontrano nel punto medio M del segmento H_1H_2 , la retta T_1T_2 tangente ad entrambe le circonferenze passante per il punto M . La normale alla retta T_1T_2 per costruzione è tangente ad entrambe le due evolventi.

Se si imprime ora graficamente una rotazione an-

tioraria al primo profilo ed una rotazione oraria al secondo profilo (fig. 7 b) si noterà che i due profili coniugati rimangono in contatto in un punto S che appartiene sempre alla retta T_1T_2 con una diversa normale evidentemente parallela alla prima. Tale condizione vale per qualsiasi rotazione viene impressa ai due profili coniugati. La retta tangente T_1T_2 è pertanto il luogo dei punti di contatto delle infinite coppie coniugate di evolventi delle due circonferenze di base dell'ingranaggio. Sempre graficamente si può evidenziare il segmento S_1S_2 cioè quella parte della retta tangente T_1T_2 compresa all'interno delle due circonferenze di testa. Questo segmento individua il campo di azione dei due segmenti coniugati, cioè in sostanza la posizione iniziale S_1 in cui il primo profilo aggancia il secondo e la posizione finale S_2 in cui i due profili si staccano.

Si intuisce subito che questa considerazione geometrica è fondamentale per il corretto funzionamento dell'ingranaggio in quanto i due denti successivi devono poter "ingranare" prima che i precedenti si stacchino; questa è la condizione necessaria per dare continuità al movimento. Sempre per mantenere il più semplice possibile l'esempio immaginiamo che le due ruote siano reversibili cioè si possa cambiare il senso di rotazione; questo significa che i denti hanno un profilo speculare che è pertanto un'altra evolvente. La ruota dentata è quindi formata da una serie di denti la cui geometria è definibile attraverso alcuni parametri costruttivi che sono, fondamentalmente il numero, il passo e la dimensione dei denti. Questi vanno evidentemente progettati in modo tale da garantire la continuità della rotazione ma anche la non interferenza tra i due denti coniugati.

Continuando la nostra sperimentazione, che ricordiamo è puramente geometrica e che quindi non tiene conto di valutazioni di carattere tecnico come per esempio il gioco meccanico o l'imprecisione costruttiva di alcuni raccordi, possiamo provare a calcolare qual è per esempio l'incidenza della geometria rispetto al passo, cioè la distanza tra due denti di una stessa ruota misurabile o al centro del dente o all'attacco P'P'' delle due evolventi successive.

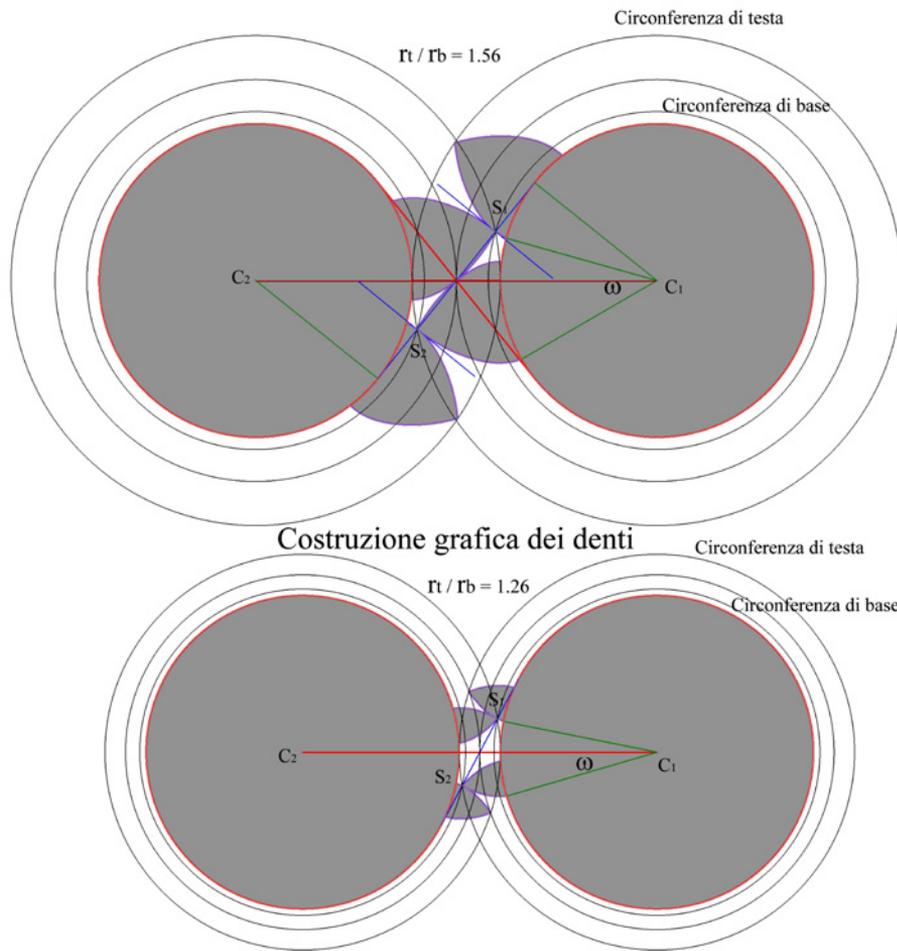
Il passo dell'ingranaggio è evidentemente esprimibile anche come valore dell'angolo w che sottende l'arco P'P'' (fig. 7 c).

Sul passo dell'ingranaggio e quindi di conseguenza sul numero dei denti si possono a questo punto fare una serie di considerazioni. La prima è che il numero deve essere intero; l'angolo relativo al passo deve essere inferiore dell'angolo ω altrimenti il movimento delle ruote non è continuo.

Il passo infine deve essere tale da garantire il perfetto incastro senza sovrapposizioni tra i denti delle due ruote.

Potremmo chiederci da cosa dipende il valore ω dell'angolo che come abbiamo visto è determinante per stabilire il passo della ruota.

Guardando attentamente le costruzioni geometriche fin qui fatte si ricava che tale valore è funzione esclusivamente del rapporto tra la circon-



10. Costruzione grafica dei denti su due coppie di ingranaggi con diverso rapporto tra il raggio della circonferenza di testa e della circonferenza di base.

ferenza esterna e la circonferenza di base. Anche qui senza addentrarci in considerazioni puramente matematiche è facile ricavare graficamente (figura 8) il valore ω dell'angolo e costruire un diagramma (figura 9) che mette in relazione i due valori: sulle ascisse l'incremento percentuale del valore del raggio delle due circonferenze, sulle ordinate il valore dell'angolo ω . Sulla curva sono individuabili i valori corrispondenti a numeri interi dei denti.

Ma se si prova a disegnare l'intero profilo del dente immaginandolo sempre nella condizione teorica minima e non costruttiva con l'altra evolvente speculare a formare una specie di arco acuto si osserva facilmente confrontando le due coppie di ingranaggi (fig. 10) che oltre un certo rapporto tra circonferenza esterna e di base, il dente non ha più lo spazio necessario per incastrarsi con l'altro. Per cui si può ricavare nel diagramma il limite oltre il quale il meccanismo non può funzionare. In tutte le altre configurazioni al di sotto di tale soglia si verifica che è possibile allargare il profilo del dente riuscendo anche a ridurre leggermente il passo in modo da avere maggiore garanzia di continuità del moto rotatorio.

Molte altre sono le valutazioni di carattere geometrico che è possibile sperimentare grazie al laboratorio virtuale del modellatore matematico. Esistono oggi anche alcuni software in uso in ambito meccanico che riescono con grande efficacia a simulare virtualmente il movimento di un ingranaggio complesso formato da più meccanismi inducendo inizialmente dei vincoli topologici (di rotazione, di traslazione o di rototraslazione) e lasciare al calcolatore il compito di simulare e quindi di verificare il corretto funzionamento del meccanismo. È significativa a tal proposito una frase di Giovanni Codazza che nel suo trattato introducendo la ricerca della traccia di un ingranaggio, cioè l'intersezione con un determinato piano, commenta: "La traccia di questa superficie, dietro considerazioni geometriche, condurrebbe ad operazioni grafiche troppo complicate per essere compatibili coi bisogni della pratica. Indipendentemente però da questa circostanza essa non presenta altra difficoltà per chi abbia famigliari i metodi della geometria descrittiva. Io mi limiterò ad

aggiungere il seguito di queste operazioni, lasciandone l'esecuzione per esercizio allo studioso." Rileggere oggi temi come questo degli ingranaggi, avendo a disposizione strumenti di rappresentazione e di calcolo avanzati come quelli informativi, consente di riaffermare il ruolo fondamentale della geometria descrittiva nel panorama scientifico dell'architettura, dell'ingegneria e del design, non solo dal punto di vista prettamente speculativo e formativo ma anche e soprattutto come fondamento dell'arte del costruire⁵.

NOTE

[1] Da alcuni anni alcuni studiosi di Geometria descrittiva hanno avviato un processo di rinnovamento della disciplina anche alla luce degli apporti derivati dalla rappresentazione informatica. Si fa riferimento in particolare ad un seminario che si è svolto a Roma nel febbraio 2007 presso il Dipartimento di Rilievo, Analisi e Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura di Roma i cui esiti sono pubblicati in: De Carlo Laura (a cura di) (2007), *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, Gangemi editore, Roma; dopo tre anni si è svolto, sempre a Roma, un secondo seminario, rivolto alla Scuola nazionale di dottorato in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, sui rapporti tra la tecnologia informatica e i fondamenti scientifici della rappresentazione, i cui esiti sono pubblicati in: Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di) (2012), *Attualità delle geometria descrittiva*, Gangemi editore, Roma; si rimanda anche al lavoro promosso dall'unità di ricerca della Geometria descrittiva, nel Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'architettura di Roma, coordinato da Riccardo Migliari che ha recentemente pubblicato il volume Migliari, Riccardo (2009), *Geometria descrittiva, Vol. I e II*, CittaStudi, Novara, con all'interno moti contribuiti relativi alle molteplici applicazioni della Geometria descrittiva.

[2] Si rimanda al volume di Codazza, Giovanni (1854), *Teoria geometrica degli ingranaggi*, Milano, di cui una copia è conservata presso la Biblioteca Boaga della Facoltà di Ingegneria di Roma.

[3] Tessari, Domenico (1902), *La costruzione degli ingranaggi*, Torino. Il testo include alcuni saggi scritti dallo stesso Tessari alcuni anni prima su alcuni problemi specifici come per esempio gli ingranaggi ad assi non concorrenti (1871) o gli ingranaggi iperboloidici a fianchi piani (1891).

[4] Per un inquadramento generale si rimanda ai seguenti link: http://mecsyst.mecc.polimi.it/Didattica/2m_fdm_varie/MatInt/pc/Storia_Ingranaggi.pdf <http://it.wikipedia.org/wiki/Ingranaggio>

[5] Altre recenti applicazioni dell'autore di rilettura in chiave attuale di problemi geometrico-costruttivi sono quelle riferite al disegno dell'ordine architettonico e al taglio del legname. Cfr. Leonardo Paris (2008) *Conseguenze informatiche nella rappresentazione. Disegno e modello del capitelli ionico*. In *Disegnare, Idee, Immagini*, n. 36, Gangemi Editore, Roma.

BIBLIOGRAFIA

Migliari, Riccardo (2009), *Geometria descrittiva, Vol. I e II*, CittaStudi, Novara.

Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di) (2012), *Attualità delle geometria descrittiva*, Gangemi editore, Roma.

De Carlo Laura (a cura di) (2007), *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, Gangemi editore, Roma.

Codazza, Giovanni (1854), *Teoria geometrica degli ingranaggi*, Milano.

Tessari, Domenico (1902), *La costruzione degli ingranaggi*, Torino.

Leonardo Paris (2008), *Conseguenze informatiche nella rappresentazione. Disegno e modello del capitelli ionico*. In *Disegnare, Idee, Immagini*, n. 36, Gangemi Editore, Roma.

Leonardo Paris (2009), *Stereotomia del Legno*, in Riccardo Migliari (2009), *Geometria descrittiva, Vol. II*, op. cit.

http://mecsyst.mecc.polimi.it/Didattica/2m_fdm_varie/MatInt/pc/Storia_Ingranaggi.pdf

<http://it.wikipedia.org/wiki/Ingranaggio>