ISSN 1828-5961

Leonardo Baglioni

Architetto, dottore di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso La Sapienza Università di Roma. Da sempre interessato ai problemi della rappresentazione matematica e poligonale, attualmente si sta occupando dello studio della discretizzazione delle superfici continue.

Nuove applicazioni della geometria descrittiva: le PQ mesh nell'architettura contemporanea
New applications of descriptive geometry: PQ meshes in contemporary architecture

I modellatori informatici, oggi a disposizione di tutti i progettisti, hanno portato ad un profondo cambiamento dell'intero processo del fare architettura. Tra i nuovi temi delle applicazioni di Geometria descrittiva, va sicuramente annoverato il passaggio della approssimazione delle superfici continue in superfici discrete. Ogni superficie continua può essere discretizzata in una superficie poliedrica composta da facce piane. L'attenzione dei progettisti si sta dirigendo verso le superfici piane quadrilatere (PQ mesh), che permettono la generazione di mesh parallele. Lo studio delle PQ mesh applicate all'architettura sembra essere una naturale evoluzione del grande tema dei poliedri, argomento ampiamente radicato nella storia della matematica e che trova nel computer una linfa vitale che alimenta, oggi più che mai, l'intera area della Geometria descrittiva.

New modeling tools, available for designers, lead to big changes in the way architecture is done. One of the main application of descriptive Geometry is the approximation of continuous shapes in discrete surfaces called mesh. Every continuous surface can be tessellated in polyhedral surface with planar faces. Designers are becoming interested in quadrilateral planar mesh (PQ mesh) that can hold important offset properties. The study of quad mesh with planar faces in architecture seems to be the natural evolution of the important and ancient subject of polyhedra, brought back to vitality by the development of computers and that affects the entire discipline of descriptive Geometry.

Parole chiave: geometria descrittiva, architectural geometry, geometria differenziale discreta, superfici free-form, mesh quadrilatere, poliedri, linee di curvatura

***Keywords**: descriptive geometry, architectural geometry, discrete differential geometry, free form surfaces, quad mesh, polyhedral, lines of curvature*

ISSN 1828-5961

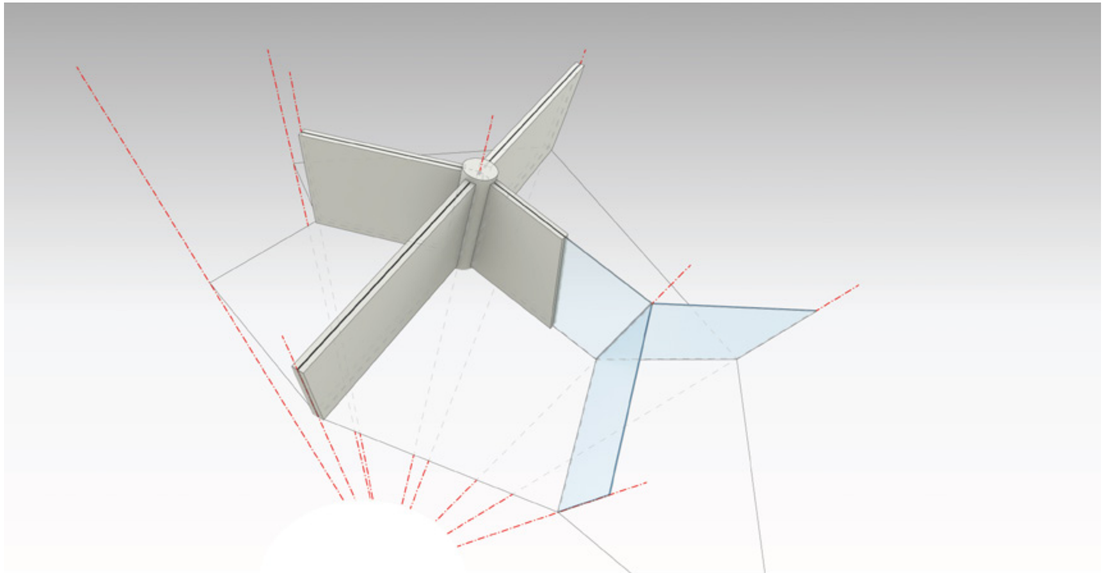
I nuovi strumenti informatici a disposizione dei progettisti hanno profondamente cambiato il loro ruolo all'interno del processo progettuale. Il cambiamento riguarda in primo luogo l'integrazione di diverse discipline che intervengono già nella fase iniziale trovando proprio nel computer lo strumento di collegamento. In questo modo viene a mancare una struttura sequenziale, rigida e lenta della progettazione a favore di un processo snello e ricco di potenzialità espressive. Questo nuovo processo progettuale si traduce sempre più spesso nelle forme libere e lontane dalle superfici analiticamente note, che stanno caratterizzando gli edifici contemporanei. Uno degli artefici di questa rivoluzione del pensiero architettonico, è stato sicuramente il contributo di F.O.Gehry non solo per la ricerca formale della sua architettura, il cui controllo è garantito da strumenti più consoni al settore dell'automotive design, ma nel nuovo ruolo che ha assunto l'architetto all'interno del percorso progettuale. Senza entrare nel merito di considerazioni critiche di questo fenomeno, va segnalato che lo slittamento verso forme più comuni alla piccola scala del design, ha portato e sta portando l'architetto a dover risolvere sfide sempre più ardue e sconosciute per arrivare alla realizzazione delle sue stesse opere. Nonostante questo forte cambiamento, la disciplina fondamentale che consente il controllo e l'indagine delle superfici *free form* rimane la Geometria descrittiva[1] che segue il progetto sin dai primi schizzi concettuali. La nuova Geometria descrittiva non può fare a meno di confrontarsi con le altre discipline che confluiscono in questo processo quali la geometria differenziale, l'ingegneria, la matematica e la scienza delle costruzioni. Alcuni autori parlano di un nuovo settore di ricerca multidisciplinare che vuole porsi come punto di incontro di questi settori del sapere scientifico, che prende il nome di *Architectural Geometry*. Ogni anno vengono organizzati incontri, cicli di conferenze e workshop, con l'obiettivo dichiarato di mettere a confronto le diverse competenze per cercare di rispondere alle nuove sfide lanciate dall'architettura contemporanea. In questa ottica è di vitale importanza anche il confronto con le aziende di settore per lo sviluppo di nuovi strumenti e per i dati che possono venire dal mondo reale[2].

Tra questi temi più importanti, che stanno vedendo impegnati da diversi anni matematici, architetti e programmatori, va annoverato il problema della discretizzazione delle superfici continue. La questione riguarda la semplificazione di una forma continua per consentirne la realizzazione. Una forma libera infatti, anche caratterizzata da variazioni repentine di curvatura, può essere realizzata seguendo vari procedimenti. In un caso si può suddividere la superficie originale in porzioni più piccole mantenendo in esse le medesime caratteristiche geometriche di andamenti di curvatura. La realizzazione allora si affiderà alla creazioni di stampi che consentano la produzione delle singole parti. In questo tipo di approccio è evidente che il beneficio più grande è quello di avere una superficie completamente aderente a quella iniziale ma il limite è costituito dall'elevato costo di produzione che potrebbe essere arginato solo se fosse possibile rintracciare nella forma originale alcune simmetrie, che consentano di replicare più parti con uno stesso stampo. Inoltre, la suddivisione in piccole regioni della superficie iniziale, comporterebbe delle criticità importanti anche nella distribuzione delle spinte e delle tensioni superficiali. Esempi significativi di questo approccio sono il Graz Art Museum di Peter Cook e Colin Fournier e l'ingresso della metropolitana di Parigi di St. Lazare progettato da Arte Charpentier.

Un secondo approccio al problema della realizzazione di una superficie continua si basa su una suddivisione della superficie iniziale attraverso pannelli a singola curvatura, in particolare con curvatura gaussiana nulla, cioè porzioni di superfici sviluppabili. In questo caso si riducono i costi di produzione rispetto al sistema precedente e anche dal punto di vista estetico si raggiunge un buon equilibrio tra approssimazione ed estetica della superficie finale. La difficoltà più grande risiede nella comprensione e nello studio della rappresentazione delle superfici di tipo semi discreto. Infatti le superfici composte da strisce di superfici sviluppabili (*D-strip models*) costituiscono un collegamento tra la categoria delle superfici continue e la categoria delle superfici discrete che vedremo più avanti, visto che possono essere interpretate come forma limite di una superficie poliedrica a facce piane e quadrilatere, sottoposta ad un'operazione di infittimento lungo la direzione di un parametro. Infine, il sistema più utilizzato per la realizzazione delle superfici libere è la riduzione in elementi piani attraverso un processo che prende il nome di tassellazione o pannellizzazione[3]. Si tratta di un'operazione per semplificare una forma di tipo continuo (ad esempio descritta matematicamente attraverso le superfici NURBS) attraverso una superficie poliedrica (cioè composta da facce piane) che sia il più aderente possibile alla superficie iniziale e che non abbia cambi repentini di lunghezza degli spigoli (questo sia per esigenze di natura estetica sia per rispondere in modo più efficace a requisiti strutturali). Il problema trova facile soluzione nelle superfici di traslazione e di rotazione ma è assai più complesso nella generalizzazione a superfici libere. Tra le strutture poliedriche più utilizzate dai progettisti si segnalano le strutture a maglia triangolare. I motivi principali di questa larga diffusione vanno rintracciati per prima cosa nella facilità e nella flessibilità di modifica che consente a queste strutture di discretizzare qualsiasi superficie garantendo la planarità delle sue facce. Inoltre la struttura localmente rigida del triangolo, rende queste strutture efficienti anche dal punto di vista statico. I punti critici riguardano invece l'elevato numero di aste che intervengono in ogni nodo (sei aste per ogni nodo) rendendo così la struttura pesante e poco trasparente.

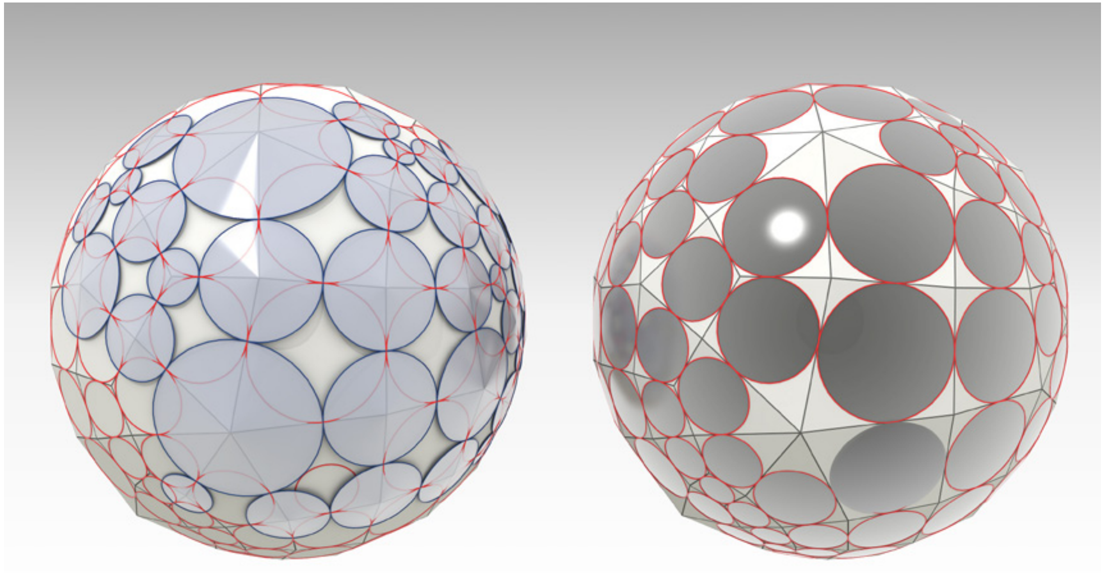
Per lo studio delle strutture discrete, è conveniente analizzare il comportamento geometrico di superfici poliedriche (*mesh*) attraverso le quali è possibile instaurare una relazione che accomuni i vertici della mesh con i nodi della struttura, gli spigoli con le aste e le facce con i pannelli. A differenza delle superfici continue, in quelle discrete si possono individuare tre tipi di parallelismo secondo una distanza fissa: mesh parallele secondo una distanza fissa tra gli spigoli (*edge offset mesh*), mesh parallele secondo una distanza fissa tra i vertici (*vertex offset mesh*) e mesh parallele secondo una distanza fissa tra le facce (*face offset mesh*). Pensando che gli spigoli delle mesh segnino le direzioni sulle quali impostare i piani

ISSN 1828-5961

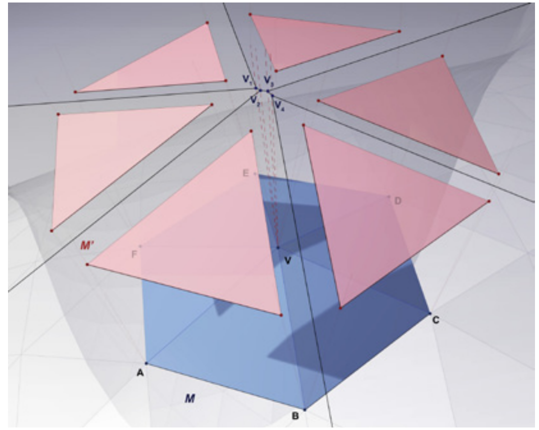


1. In un nodo libero da torsioni i piani assiali delle travi si incontrano secondo una linea retta.

delle travi strutturali di supporto dei pannelli, ci si chiede se è possibile avere dei nodi per ciascun vertice della mesh in cui le diverse giaciture si incontrino secondo una retta[4] e quali dovranno essere le caratteristiche geometriche di queste mesh per poter rispondere a questi requisiti (fig. 1). Escludendo casi particolari come ad esempio i poliedri regolari, semiregolari e catalani, per le mesh triangolari in generale non è possibile ottenere vertici senza torsione e non è possibile generare delle face offset mesh. Per finalità costruttive le edges offset mesh e le face offset mesh possiedono caratteristiche davvero interessanti. Le prime consentono di realizzare strutture con travi ad altezza costante che si incontrano secondo un asse in ciascun vertice le seconde, che analizzeremo in seguito, possono essere utilizzate nelle strutture multi strato.
Dal punto di vista geometrico, una delle questioni più importanti riguarda la possibilità di approssimare una forma assegnata in modo da generare una mesh che sia di una specifica classe, e quali principi geometrici devono essere gestiti per controllare questo processo. Il settore multidisciplinare della Architectural Geometry sta portando avanti studi interessantissimi riguardo questi temi, sviluppando (spesso con il linguaggio simbolico della matematica) le ricerche condotte a partire dagli anni ’60 sulla *discrete geometry*. A titolo esemplificativo nel settore molto restrittivo delle edge offset mesh, solo intorno al 2006 si è riusciti a dimostrare che se una mesh possiede questa proprietà allora per ogni suo nodo gli spigoli uscenti apparterranno allo stesso cono di rivoluzione il cui asse è comune a tutti i vertici corrispondenti delle mesh parallele[5]; inoltre la sua immagine gaussiana deve essere necessariamente un poliedro di Koebe (fig. 2).
La dimostrazione della impossibilità di creare mesh triangolari parallele ad una assegnata, può essere affrontata con una piccola dimostrazione esistenziale[6] utilizzando il laboratorio virtuale della rappresentazione matematica (fig. 3). Partendo da un vertice di una superficie poliedrica **M** che chiameremo mesh, composta da facce triangolari, generiamo dei piani paralleli a ciascuna faccia a distanza fissata **d**; quindi **M’** sarà una superficie *face offset mesh* di **M**. Si nota che la corrispondenza biunivoca tra vertici, spigoli e facce di **M** con **M’** non viene rispettata. Possiamo quindi dire che in generale le mesh triangolari non hanno la possibilità di avere delle mesh di offset e di conseguenza non possono essere utilizzate in strutture che prevedano l’uso di strati paralleli per diversificarne le funzioni. Inoltre se pensiamo che ogni spigolo di **M** passerà un’ipotetica asta a sezione rettangolare, accade che i piani assiali di ciascuna trave interverranno nel vertice secondo giaciture diverse. In altre parole ogni nodo dovrà essere realizzato ad hoc per convogliare le diver-



2. In un poliedro di Koebe tutti gli spigoli sono tangenti ad un'unica sfera che interseca le facce secondo cerchi inscritti (in rosso); per ogni vertice passa un cono che è tangente alla sfera generando cerchi (in blu) ortogonali ai precedenti.

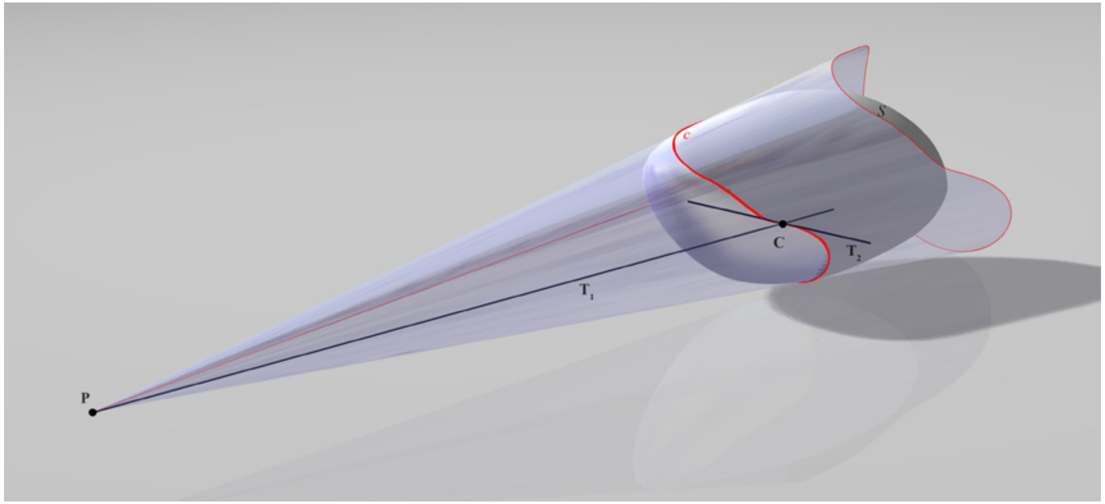


3. In generale le mesh triangolari non consentono di generare mesh parallele a distanza costante tra le facce e tali da mantenere la stessa corrispondenza biunivoca tra vertici, spigoli e facce.

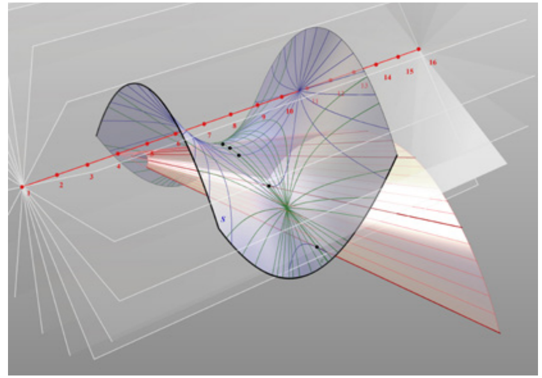
se giaciture entranti.
Recentemente l'attenzione dei progettisti si sta rivolgendo sempre più spesso verso l'uso di strutture a maglie quadrilatere che offrono vantaggi in termini estetici ed architettonici come ad esempio la maggiore trasparenza e leggerezza visto che per ciascun nodo intervengono solamente quattro aste. Il problema della discretizzazione per mezzo di superfici quadrilatere è però più complesso da affrontare rispetto al caso delle strutture triangolari perché in questo caso la planarità non è più garantita in modo univoco. Le *PQmesh* (*planar quadrilateral mesh*) furono definite per la prima volta nel 1970 da Sauer[7] e poi analizzate insieme a Bobenko[8] nel libro *Discrete Differential Geometry*. Nella sua introduzione viene espressa la definizione di questa branca della matematica che si pone al confine tra la geometria differenziale classica, che studia le entità geometriche continue (come le superfici), e la geometria discreta che si occupa dello studio delle entità geometriche con un numero finito di elementi (come ad esempio sono i poliedri). L'obiettivo principale della geometria differenziale discreta è l'analisi delle entità discrete che sono la controparte di entità continue. Questo perché molte proprietà sofisticate della geometria differenziale trovano una semplice spiegazione dentro la geometria differenziale di tipo discreto. Bisogna però segnalare che la convergenza dal discreto al continuo è rigorosamente verificata solo per alcune classi di entità come le curve coniugate, le superfici a costante e negativa curvatura gaussiana, ma per altre come le *isothermic surface*, di cui fanno parte le superfici minime, la condizione non è ancora dimostrata. L'interesse di questa ricerca non va ritrovato solo nel campo della matematica ma nelle ricadute che può avere in diversi settori scientifici come ad esempio la *computer graphics* e ovviamente l'architettura.

Uno dei contributi più significativi nello studio delle PQ mesh, è fornito dagli studi in continua evoluzione di Helmut Pottmann, che in molti dei suoi articoli definisce le proprietà fondamentali di questi enti geometrici.
Tra le sue osservazioni più importanti che riguardano più da vicino il nostro settore va segnalata la caratteristica che le *PQ mesh* possono essere considerate come il corrispondente discreto delle reti di linee coniugate delle superfici continue. Queste si definiscono come coppie di famiglie di linee di una superficie, tali che per ogni punto della superficie passino una sola curva della prima famiglia e una sola curva della seconda in maniera tale che le due direzioni tangenti alle due curve siano coniugate. Per spiegare le caratteristiche geometriche delle tangenti coniugate di una superficie possiamo immaginare un punto **C** di una superficie **S** e una tangente $\mathbf{T_1}$ alla superficie uscente da esso (fig. 4). Stacchiamo su $\mathbf{T_1}$ un pun-

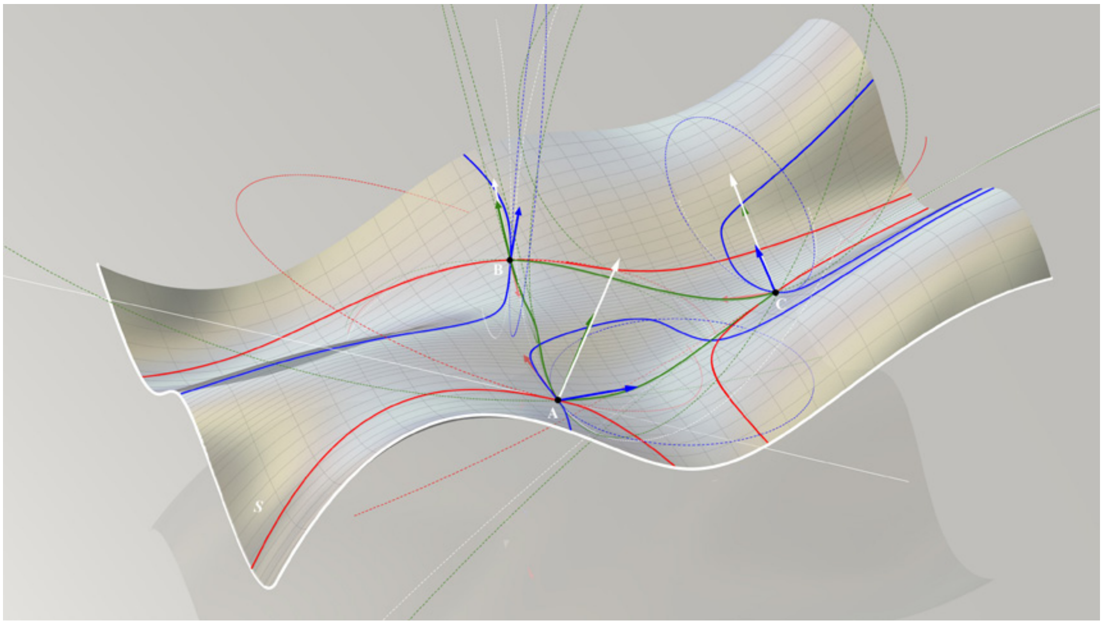
ISSN 1828-5961



4. Nella superficie **S** le tangenti T_1 e T_2 sono una coppia di direzioni coniugate nel punto **C**.



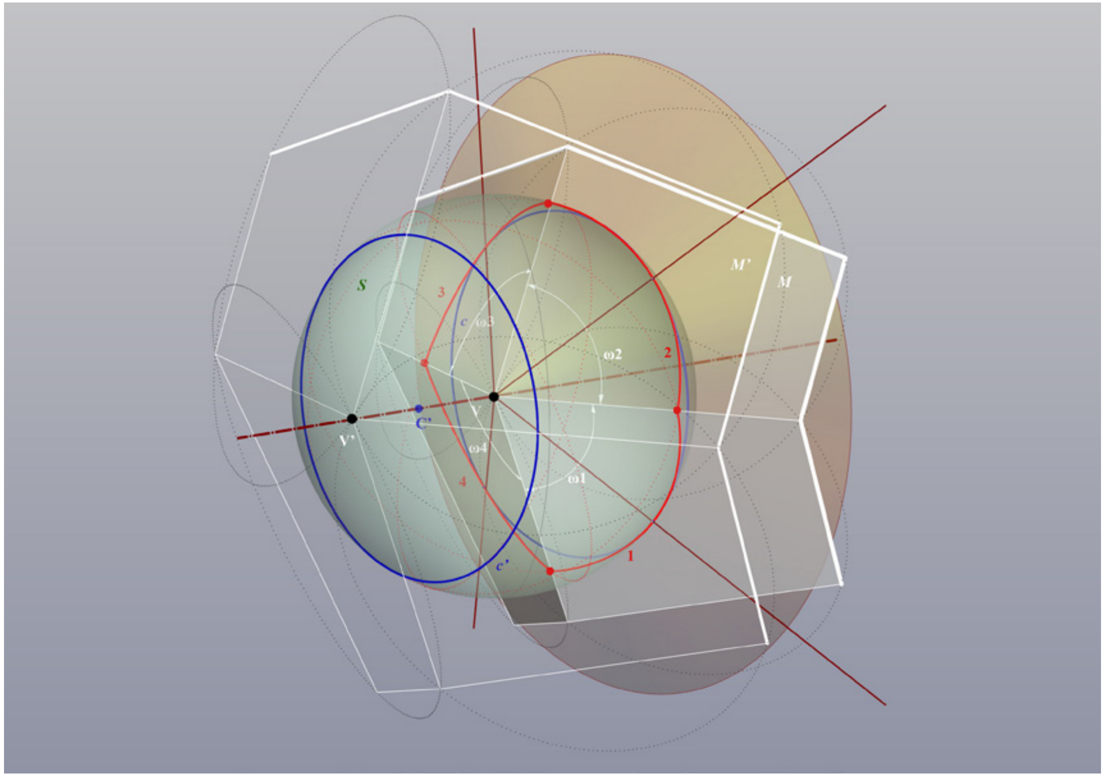
5. Nelle linee coniugate le tangenti alle linee di una famiglia (in verde le linee di contorno apparente da punti che si muovono lungo una direzione) nei punti d'intersezione con le linee dell'altra famiglia (in blu le intersezioni tra un fascio di piani e la superficie) generano una superficie sviluppabile.



6. Reti di linee di curvatura minima (in rosso) e massima (in blu): le normali alle curve nei punti di intersezione sono ortogonali. Le geodetiche (in verde) hanno in ogni punto la direzione della normale parallela alla normale della superficie nello stesso punto.

to **P** e tracciamo su **S** il contorno apparente dal punto **P**, in modo da definire un cono proiettivo di cui $\mathbf{T_1}$ costituisce una delle generatrici: la direzione $\mathbf{T_2}$ tangente al contorno apparente ***c*** nel punto **C** si dice coniugata alla direzione $\mathbf{T_1}$. Generalizzando questa proprietà possiamo affermare che se **Ω** è la superficie sviluppabile definita dall'inviluppo della famiglia di piani tangenti ad **S** lungo una curva ***c***, e se $\mathbf{T_1}$ costituisce una delle generatrici di **Ω** in un punto **C** di ***c***, allora la tangente $\mathbf{T_2}$ alla curva ***c*** sempre nel punto **C** è coniugata a $\mathbf{T_2}$. In altre parole possiamo dire che le linee coniugate hanno l'interessantissima proprietà per la quale le tangenti alle linee di una famiglia nei punti d'intersezione con le linee dell'altra famiglia generano una superficie sviluppabile (fig. 5). Tra gli esempi di reti coniugate di linee su una superficie, possono essere citate le famiglie di direttrici e generatrici di una superficie di traslazione, oppure la famiglia delle linee d'intersezione tra la superficie ed un

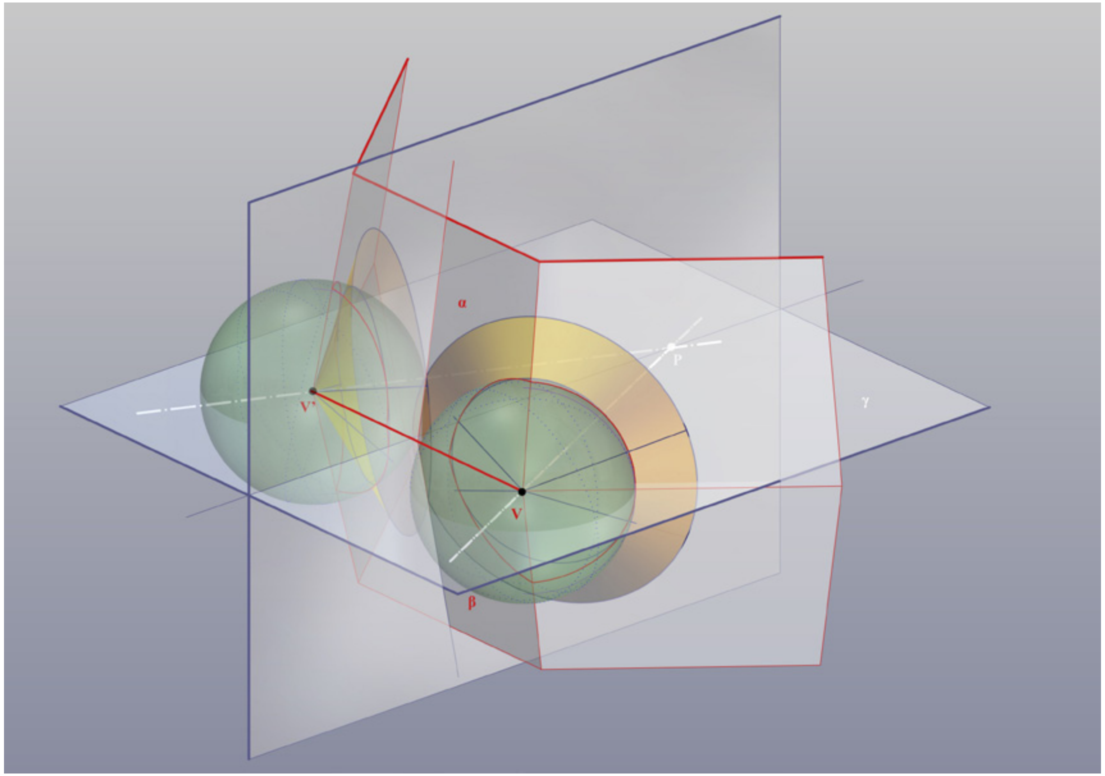
ISSN 1828-5961



7. Per ciascun vertice di una conical mesh **M** le quattro facce adiacenti sono tangenti ad un unico cono di rivoluzione il cui asse è comune ai vertici corrispondenti di ogni altra conical mesh **M'** parallela ad **M**.

fascio di piani uscenti da una retta con la famiglia dei contorni apparenti generati a partire da punti della stessa retta e, tra le più importanti, la rete di linee generata dalle linee di curvatura (fig. 6). Queste ultime si definiscono come le curve di una superficie tali che in ciascun punto la direzione della tangente alla linea è una delle due direzioni principiali uscenti dal punto. Poiché le curvature principali di un punto di una superficie giacciono su piani ortogonali, allora le reti delle linee di curvatura si toccano in punti in cui le direzioni delle tangenti alle due linee sono coniugate e ortogonali (escludendo però i punti ombelicali).
Una particolare discretizzazione della rete di linee di curvatura (*network of conjugate curves*) di una superficie continua genera una superficie poliedrica caratterizzata dal fatto che le facce non sono solamente quadrilateri piani ma sono anche inscrivibili in un cerchio[9]. Queste superfici poliedriche prendono il nome di *circular mesh*. Per le importanti ricadute che si hanno in campo architettonico sul progetto delle strutture free form, vanno segnalate le *conical mesh*, che nascono sempre da una discretizzazione della rete di linee di curvatura. La caratteristica geometrica più importante di queste mesh (da cui il nome coniche) sta nel fatto che per ogni vertice le quattro facce adiacenti sono tangenti ad un unico cono di rivoluzione il cui asse può essere considerato come la normale uscente dal vertice della superficie poliedrica. Immaginiamo quattro facce quadrilatere di una mesh incidenti nel vertice **V** (fig. 7); creiamo una sfera con centro in **V** in modo da tagliare la mesh secondo un poligono sferico di quattro lati. Se la mesh **M** è una *conical mesh* allora i quattro lati circolari saranno tangenti ad una coppia di cerchi **c** e **c'** per i quali i centri saranno allineati con il vertice **V** secondo una retta che individua l'asse della *conical mesh* uscente da **V**. Ogni *conical mesh* **M'** parallela[10] ad **M** avrà i vertici **V'** corrispondenti a **V**, allineati sullo stesso asse. Il vertice **V** di **M** prende il nome di *conical vertex*, e affinché

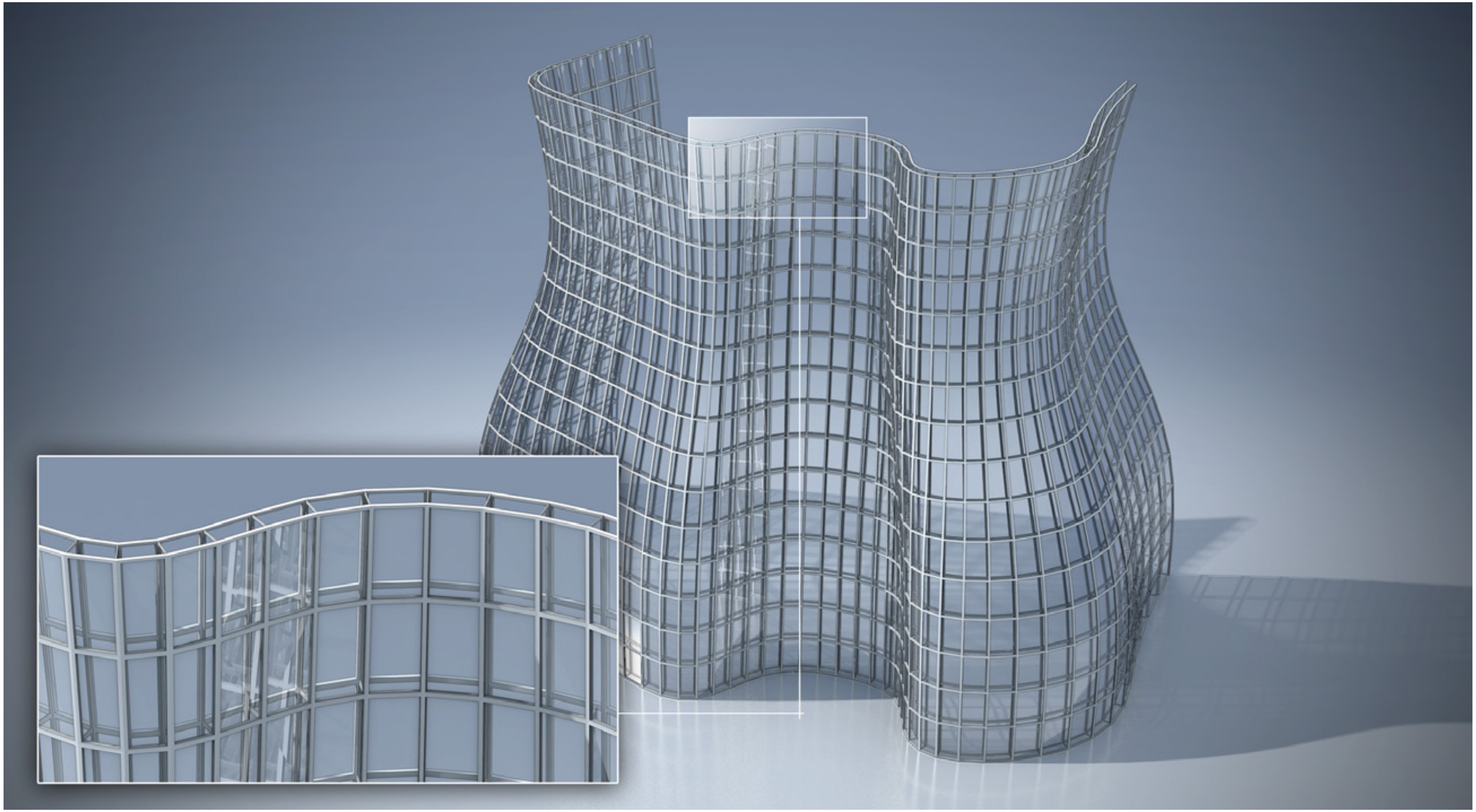
ISSN 1828-5961



8. Gli assi dei coni uscenti da due conical vertex adiacenti **V** e **V'**, sono complanari con lo spigolo tra essi compreso.

una mesh sia di tipo *conical* ciascuno dei suoi vertici deve essere un *conical vertex* con valenza 4[11] (escludendo i vertici sui bordi con valenza 2 e 3). Analogamente a ciò che avviene per le superfici continue per le quali ogni punto è classificabile secondo tre possibili tipologie (iperbolico, parabolico oppure ellittico) anche nelle *conical mesh* si può valutare la caratteristica geometrica di un intorno di ciascun vertice. Utilizzando una sfera con centro nel vertice, si interseca la mesh secondo un poligono sferico a quattro lati; se questi non sono contenuti nello stesso semispazio parliamo di punto iperbolico, in caso contrario si parla di punti ellittici o parabolici. Un'altra condizione fondamentale che caratterizza gli angoli interni delle sue facce, e che costituisce un aspetto importantissimo per la computazione di una *conical mesh* è che deve essere verificata l'uguaglianza angolare **ω1**+ **ω3**= **ω2**+ **ω4**, dove **ω** indica l'angolo al vertice **V** di una faccia[12].
Abbiamo detto che in generale le mesh (siano esse triangolari che quadrilatere) non hanno la caratteristica di ammettere delle mesh di offset. Nelle c*onical mesh*, esattamente come avviene per le superfici continue sottoposte a offset secondo le normali, viene invece verificata la proprietà di poter generare delle *face offset mesh*, in cui le nuove facce incidenti in ciascun vertice sono tangenti al cono di rivoluzione con lo stesso asse uscente dal vertice originale. Se consideriamo due vertici adiacenti **V** e **V'** di una conical mesh **M**, allora ci saranno due facce ***α*** e ***β*** che saranno tangenti ad una stessa coppia di coni con assi incidenti in un punto **P** che apparterrà al piano bisettore ***γ*** (fig. 8). Ciò porta alla proprietà fondamentale per la quale in una conical mesh due normali adiacenti e lo spigolo compreso giacciono su di un medesimo piano. È proprio questa caratteristica che consente di costruire un sistema di piani ortogonali alla mesh iniziale e ad ogni sua face offset mesh che può essere utilizzato nelle struttura multi strato come struttura di collega-

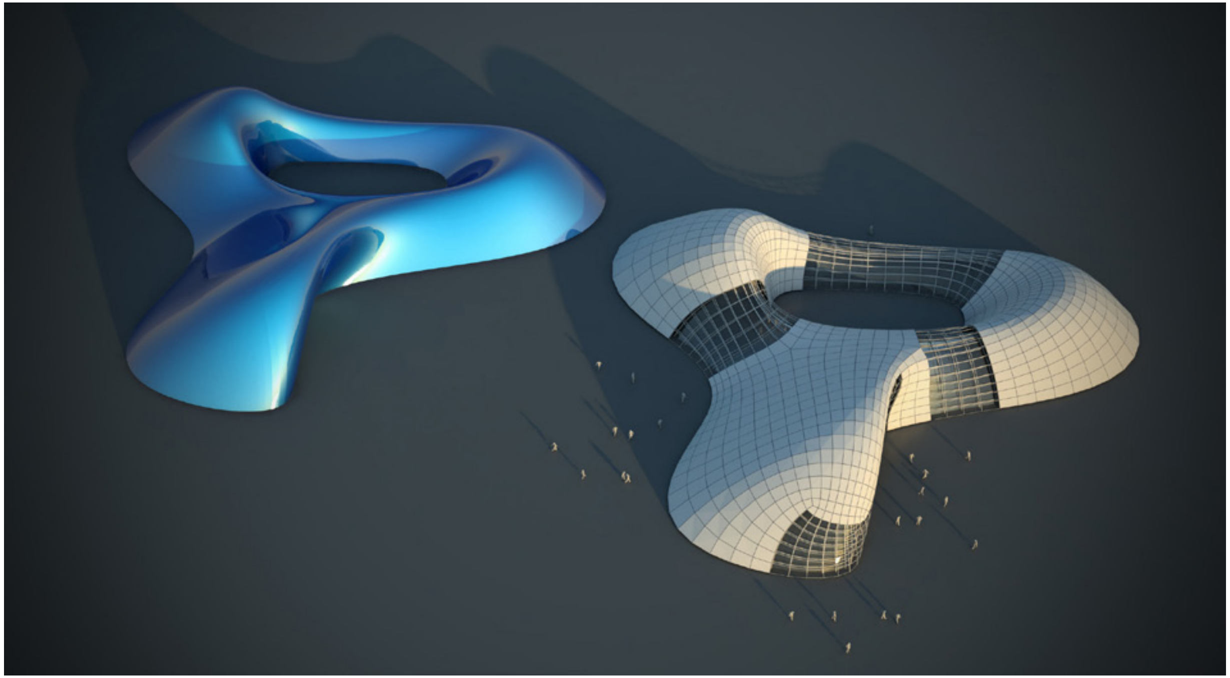
ISSN 1828-5961



9. Discretizzazione di una superficie continua per mezzo di una conical mesh che consente la realizzazione di una struttura multi strato.

mento trasversale (fig. 9). Inoltre visto che le normali discrete di una conical mesh in successione secondo una riga o una colonna sono complanari, esse individueranno una superficie sviluppabile. Pottmann arriva a questo punto ad una conclusione degna di nota: visto che nelle superfici continue le normali di una curva generano una superficie sviluppabile solo se la curva è una linea di curvatura principale segue che le conical mesh sono a tutti gli effetti la controparte discreta delle reti di linee di curvatura principali.
Abbiamo visto le caratteristiche geometriche che definiscono se una mesh è di tipo conica oppure no. Il prossimo passo è quello di trovare un procedimento che riesca a generare una conical mesh a partire da una superficie continua, che potrebbe essere ad esempio una superficie free form progettata e rappresentata matematicamente attraverso le NURBS. Il procedimento proposto dallo stesso Pottmann si basa su alcune proprietà fondamentali delle *PQ mesh*, in particolare il fatto che sia le *conical* che le *circular* possono essere considerate discretizzazioni di reti di linee di curvatura. Il primo passaggio consiste nel calcolare

ISSN 1828-5961



10. Esempio di applicazione di un algoritmo di suddivisione e perturbazione di un mesh per la realizzazione di una conical mesh a partire da una superficie NURBS.

una *principal component analysis* (**PCA**) che consiste nel determinare per un intorno[13] di punto **P** di una superficie le direzioni delle curvature principali che poi vengono proiettate sul piano tangente alla superficie in **P**. Il passaggio successivo è quello di garantire la planarità delle facce quadrilatere. La condizione geometrica da verificare nel caso delle circular mesh è che in ogni quadrilatero convesso e piano la somma degli angoli interni sia 2π, a cui va aggiunto il vincolo che per ogni vertice deve valere $\boldsymbol{\omega_1} + \boldsymbol{\omega_3} - \boldsymbol{\omega_2} - \boldsymbol{\omega_4} = 0$ affinché sia una *conical mesh*. Il raggiungimento di tali requisiti si ottiene attraverso una combinazione di operazioni di suddivisione della mesh di origine (che nasce da una discretizzazione non necessariamente rifinita della rete delle linee di curvatura) a cui seguono delle perturbazioni (*conical/circular perturbation*) dei vertici che producono risultati di grande interesse anche dal punto di vista estetico, generando mesh isotrope con variazioni limitate e graduali di lunghezza e direzione degli spigoli (fig. 10).

La ricerca sulle proprietà geometriche e sulle possibilità di computazione delle superfici PQ mesh, è in continua evoluzione e trova la sua importanza non soltanto nelle ricadute che può avere in campo architettonico oppure informatico. Il vero motivo di interesse che va sottolineato, sta invece nel fatto che un argomento apparentemente chiuso e ampiamente dibattuto per le sue antichissime radici, come quello dei poliedri, sia stato in realtà nuovamente riscoperto. Lo strumento di indagine, il computer, ha profondamente modificato le metodologie di analisi mettendo in luce le potenzialità che il tema dei poliedri offre. Si pensi ad esempio all'importanza della visualizzazione di un fenomeno geometrico in funzione della sua comprensione profonda[14]. Ma ancora il contributo dei metodi della rappresentazione matematica (o poligonale) va ritrovato nella loro natura di essere il punto d'incontro e il linguaggio comune di molte discipline che troppo spesso, fino ad oggi, viaggiavano su binari paralleli. I gruppi di lavoro come *Smart Geometry* o la ricerca multidisciplinare della *Architectural Geometry* sono l'esempio concreto di quanto questo fenomeno sia attuale e ricco di fermento a livello mondiale. La rinnovata Geometria descrittiva, non più appannaggio della sola matematica, trova nuova linfa in queste esperienze divenendo, forse oggi come non mai, una scienza adatta allo studio delle figure geometriche e alla ricerca delle loro proprietà, oltre che rimanere, con le sue applicazioni, fondamento per la formazione di ingegneri e architetti.

ISSN 1828-5961

NOTE

[1] La scrittura Geometria descrittiva, con una maiuscola ed una minuscola, fa riferimento alla distinzione dei due modi di intendere la disciplina proposta da Riccardo Migliari nel contributo dal titolo La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale, in Attualità della Geometria Descrittiva, Gangemi editore, 2012, pp 15-42. In particolare con Geometria Descrittiva si intende quella di Gaspard Monge mentre con Geometria descrittiva si intende "… la nostra scienza come insieme dei risultati conseguiti nell'arco della Storia da Vitruvio ai giorni nostri, passando attraverso i maestri della prospettiva".

[2] Tra le varie aziende attive in questo settore di ricerca si possono segnalare Waagner-Biro Stahlbau (Vienna), RFR (Parigi) e la giovanissima Evolute (Vienna).

[3] Baglioni Leonardo, (2012), I poliedri e le tecniche di tassellazione delle superfici continue: un nuovo punto di incontro, in, Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo, a cura di, Attualità della Geometria Descrittiva, Gangemi editore, 2012, pp 297-314.

[4] I nodi con queste caratteristiche si definiscono privi di torsione.

[5] Pottmann Helmut, Liu Yang, Wallner Johannes, Bobenko Alexander, Wang Wenping (2007), Geometry of Multi-layer Freeform Structures for Architecture, in ACM Trans. Graphics, Vol 26 n.3 2007, pp. 1-11.

[6] Loria, Gino, (1935), Metodi Matematici, Hoepli, Milano.

[7] Sauer, Robert, (1970), Differenzegeometrie, Springer, Berlin.

[8] Bobenko Alexander, Suris Yuri B.,(2008), Discrete Differential Geometry: Integrable Structure. Volume 98 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

[9] Martin R. Raphael, de Pont J., Sharrock T. J. (1984), Cyclide surfaces in computer aided design, in The mathematics of surfaces, Ed. J. A. Gregory, Oxford University Press, pp 253–268.

[10] Una mesh M' è parallela ad una mesh M se è verificata la corrispondenza biunivoca tra le caratteristiche topologiche (vertice con vertice, spigolo con spigolo e faccia con faccia) e se gli spigoli sono paralleli. Inoltre nelle superfici poliedriche si possono individuare tre tipi di parallelismo secondo una distanza fissa (offset): mesh offset secondo una distanza fissa tra gli spigoli, mesh offset secondo una distanza fissa tra i vertici e mesh offset secondo una distanza fissa tra le facce.

[11] Per valenza di un vertice si intende il numero degli spigoli in esso convergenti.

[12] Wang Wenping, Wallner Johannes, Liu Yang, (2006), An angle criterion for conical mesh vertices, in Geometry preprint 157, Vienna Univ. of Technology.

[13] La dimensione dell'intorno di P è definita dal raggio di una sfera con centro in P variabile a seconda dell'accuratezza ricercata. In realtà quella che viene calcolata è una sorta di media di queste caratteristiche rispetto un intorno di P.

[14] A titolo esemplificativo vorrei ricordare che l'avvento del calcolatore, e delle sue possibilità di visualizzare le configurazioni spaziali degli enti geometrici, ha portato alla scoperta dei poliedri irregolari nel 1993 ad opera dei matematici Wearie e Phelan (che ottimizzano il quesito proposto verso la fine del 1800 da Lord Kelvin), e le proprietà dell'endecaedro bisimmetrico scoperto da Guy Inchbald nel 1996 (che gli consentono di tassellare lo spazio).

BIBLIOGRAFIA

Bogart, Andrew. Kocaturk, Tuba (2007), Free Form design as the digital "Zeitgeist", in Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 48 2007, pp 3-9.

Forster Kurt Walter (a cura di), (2004), Metamorph: Focus, in catalogo, La Biennale di Venezia, Marsilio ed., 2004, pp. 6-13.

Emmer, Michele, (2007), L'idea di spazio da Escher all'architettura virtuale, in De Carlo Laura, a cura di, Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione, Gangemi editore, 2007, pp 47-54.

Baglioni, Leonardo (2012), I poliedri e le tecniche di tassellazione delle superfici continue: un nuovo punto di incontro, in, Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo, a cura di, Attualità della Geometria Descrittiva, Gangemi editore, 2012, pp 297-314.

Loria, Gino, (1935), Metodi Matematici, Hoepli, Milano.

Migliari, Riccardo (2008), Rappresentazione come sperimentazione, in Ikhnos analisi grafica e storia della rappresentazione, Lombardi editori, Siracusa 2008, pp. 11-28.

Migliari, Riccardo (2012), La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale, in, Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo, a cura di, Attualità della Geometria Descrittiva, Gangemi editore, 2012, pp 15-42.

Sauer, Robert (1970), Differenzegeometrie, Springer, Berlin.

Pottmann, Helmut. Liu, Yang. Wallner, Johannes. Yang, Yong-Liang. Wang, Wenping (2006), Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces, in ACM Trans. Graphics, Vol 25 n.3 2006, pp 681-689.

Pottmann, Helmut. Brell-Cokcan, Sigrid. Wallner, Johannes, (2006), Discrete Surfaces for Architectural Design, in Curves and Surface Design: Avignon 2006, Nashboro Press, 2007, pp 2123-234.

Pottmann, Helmut. Liu, Yang. Wallner, Johannes. Bobenko, Alexander. Wang, Wenping (2007), Geometry of Multi-layer Freeform Structures for Architecture, in ACM Trans. Graphics, Vol 26 n.3 2007, pp. 1-11.

Pottmann, Helmut. Asperl, A.. Hofer, M.. Kilian, A. (2007), Architectural Geometry, Bentley Institute Press.

Bobenko, Alexander. Suris, Yuri B.,(2008), Discrete Differential Geometry: Integrable Structure. Volume 98 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

Martin, R. Raphael. de Pont J., Sharrock T. J. (1984), Cyclide surfaces in computer aided design, in The mathematics of surfaces, Ed. J. A. Gregory, Oxford University Press, pp 253–268.

Wang, Wenping. Wallner, Johannes. Liu, Yang (2006), An angle criterion for conical mesh vertices, in Geometry preprint 157, Vienna Univ. of Technology.

Fallavollita, Federico (2008), Le superfici rigate e le superfici sviluppabili. Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale, Tesi di Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, XXI ciclo, Sapienza Università di Roma, 2008.