



Marco Carpiceci

Professore Associato dal 2005; dal 1985 insegna Disegno nella Sapienza di Roma. Dal 2007 coordina una Unità di Rilevamento Architettonico per le chiese rupestri in Cappadocia. Dal 1984 svolge attività di rilevamento dei Beni Architettonici in Italia e all'estero, (Fondi, S.Magno 2008; Reggia di Caserta 2003; Gaeta, Castello 1995; Roma, S. Pietro costantiniana 1993; Po'dolsk (Mosca) 1991; Tuscania, S.Maria Maggiore 1988. Esperto di fotografia digitale e studioso di Leonardo da Vinci.

Da retta a curva: costruzioni grafiche di trasformazione di una retta spezzata in una linea curva *From rectilinear line to curve: graphic constructions to transform of a polyline in a curved line*

Proviamo a pensare quali sequenze di tratti curvilinei possono meglio descrivere una poligonale. Le curve più semplici sono la circonferenza e l'ellisse, e queste sono le due linee curve che vengono utilizzate in questo saggio. La linea ellittica ha una complessità in più rispetto alla circonferenza: la sua utilizzazione all'interno di polilinee non è sempre tollerata dai software grafici. La soluzione migliore quindi è senz'altro la "simulazione" della forma ellittica mediante il numero minore possibile di tratti circolari.

Un'ultima costruzione fornisce la possibilità di costruire, per punti, una curva di forma apparentemente ellittica ma determinata come un originale tipo di trasformata: la congiunzione per trasformazione polare. Di questa funzione viene analizzato sia l'aspetto grafico, sia quello analitico; consentendone una visione completa, al di là della contingente utilità per il disegno.

Which curves can better describe a polyline? Circle and ellipse are the simplest curves and the only ones used in this paper. An elliptical line is more complex than circumference: in fact many graphic softwares can't use it in polylines. The best solution is certainly the "simulation" of elliptical shapes using only circular arcs. The final construction included in this paper shows the possibility of constructing, point to point, a pseudo-elliptical curve with an original type of transformed curve: the conjunction by polar transformation. This function is analyzed in its both graphic and numerical aspects in order to completely map its behavior, beyond the contingent utility of architectural drawing.

Parole chiave: poligonale, curve policentriche, trasformazione polare

Keywords: *polyline, curve, polar transformation*

1. CRITERI GENERALI

La trasformazione di una spezzata in una linea curva non è, come apparentemente potrebbe essere ritenuto, un semplice esercizio speculativo geometrico. Sono molte le applicazioni in cui questo tipo di costruzione grafica si presenta come soluzione ad un determinato problema applicativo.

Nel rilevamento architettonico, la misura di superfici curve si riduce sempre nella misurazione di una certa quantità di punti sufficiente ad una appropriata descrizione del soggetto. Nella pratica, dopo la fase iniziale di misurazione, si ha la necessità di trasformare la serie di punti registrati in una spezzata e poi in una linea curva. Pensiamo ad esempio al rilevamento di una sezione orizzontale di un'abside, o a quella verticale di una volta a botte. Certamente più alta è la quantità di punti registrati, minore è la necessità di trasformazione della spezzata che unisce i punti in una linea curva. Se invece i punti presi sono radi allora si fa più necessaria la trasformazione. Certamente il problema si presenta anche nello spazio ma in questo contributo analizzeremo solamente l'aspetto bidimensionale.

Un'altra applicazione retta-curva è certamente quella progettuale, nella quale si possono decidere una serie di punti obbligati di 'passaggio' da trasformare poi in una linea curva continua da utilizzare, per estrusione, come direttrice di una superficie rigata: come una copertura o una parete. La conoscenza del processo 'costruttivo-geometrico' della linea curva è quindi alla base di una cosciente progettazione finalizzata al processo costruttivo-fisico.

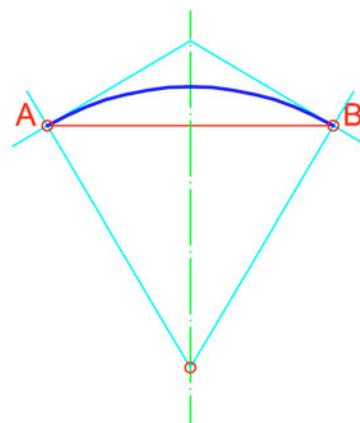
Nelle varie metodologie di 'costruzione-geometrica' vedremo come la semplificazione delle curve, come l'utilizzo di archi circolari, può portare ad una combinazione apparentemente vicina ad una sequenza di tratti ellittici, più armonica nei confronti della spezzata di partenza, ma quasi indistinguibile e dotata di maggiore semplicità costruttiva.

2. DA SEGMENTO AD ARCO

Iniziamo ora ad analizzare il problema geometrico partendo dalla semplice *congiunzione lineare* tra due punti, che si vuole trasformare in una curva. Volendo utilizzare curve semplici possiamo pensare di congiungere i punti tramite archi circolari o ellissi. Vediamo alcuni sistemi grafici di soluzione.

Il primo sistema, il più semplice, consiste nel tracciamento di una congiunzione circolare. Dati due punti A e B congiunti da un segmento, il centro dell'arco di circonferenza deve appartenere all'asse del segmento stesso. La posizione del centro lungo l'asse è data dall'inclinazione dei raggi in A e in B che vengono a formare con il segmento un triangolo isoscele, di cui è la base, con vertice nel centro dell'arco. Le tangenti nei punti sono per costruzione ortogonali ai raggi relativi e la loro inclinazione determina la freccia dell'arco e quindi l'entità di scostamento dell'arco dal segmento di base (Fig. 1).

Il secondo metodo realizza una *congiunzione ellittica*. Per comprendere la costruzione rivediamo innanzitutto la costruzione dell'ellisse

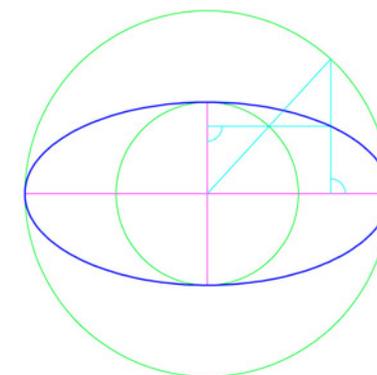


1

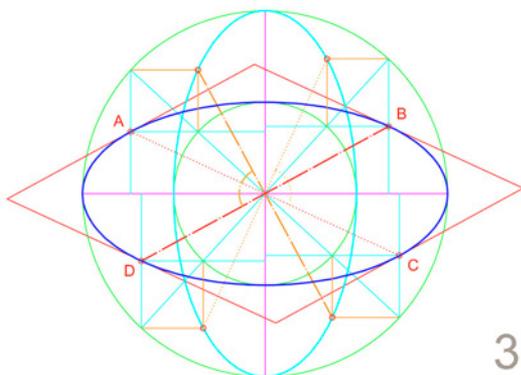
per *punti trasformati*, detta anche "della *doppia affinità ortogonale*". Tracciati due assi (ortogonali) e le due circonferenze, iscritta e circoscritta alla futura ellisse, stabiliamo l'asse maggiore orizzontale e conseguentemente il minore verticale. Ad ogni raggio determiniamo il punto trasformato corrispondente per intersezione delle rette condotte per le due intersezioni ed ortogonali all'asse relativo. Vale a dire tracciando dall'intersezione con la circonferenza maggiore la retta ortogonale all'asse maggiore e dall'intersezione con la circonferenza minore la perpendicolare all'asse minore; reiterando la costruzione per infiniti raggi otteniamo l'ellisse punteggiata (Fig. 2).

Se tracciamo una coppia di diametri ortogonali, e determiniamo i quattro punti trasformati dell'ellisse A B C e D, unendo i punti opposti A-C e B-D individuiamo due diametri trasformati coniugati dell'ellisse, vale a dire assi di simmetria obliqua (fig. 3).

Invertendo l'attribuzione degli assi (maggiore minore) abbiamo una seconda ellisse identica alla precedente ma ruotata di 90°. Ne consegue che, data una coppia di diametri ortogonali, i diametri



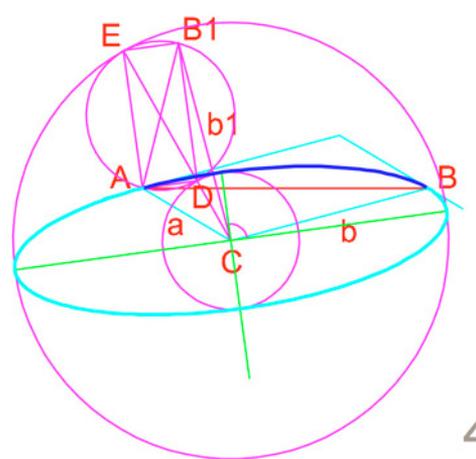
2



3

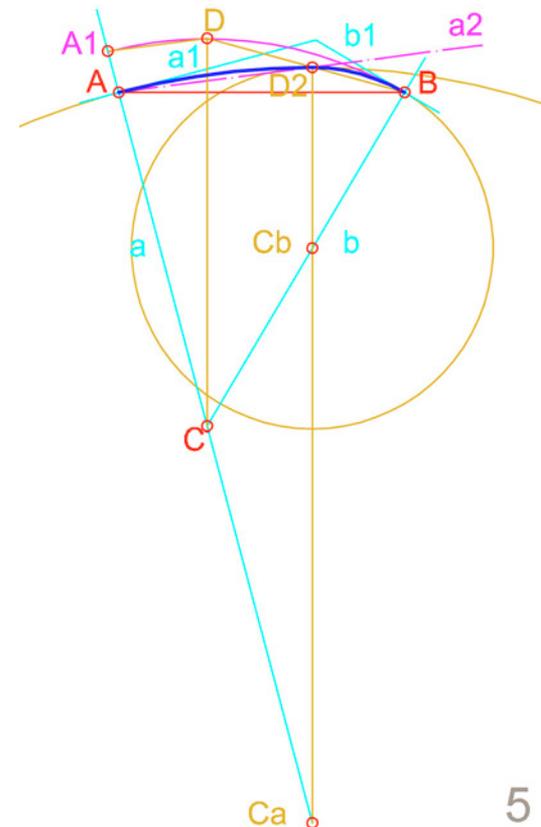
trasformati saranno anche loro ortogonali (fig. 3). Questa considerazione suggerisce una costruzione geometrica per la soluzione del quesito: *determinare gli assi dell'ellisse conoscendo due diametri coniugati*.

Torniamo al nostro segmento A-B da trasformare in curva ellittica, e tracciamo due rette che vogliamo siano le tangenti locali dell'ellisse. Questa è l'unica variabile che ci serve per determinare la conica. Conoscendo le due tangenti tracciamo, parallelamente, i due corrispondenti diametri coniugati 'a' e 'b' che si intersecano nel centro C dell'ellisse (fig. 4). Ruotiamo uno dei diametri di 90°, ad esempio 'b' in 'b1'; così facendo abbiamo individuato il punto B1 che con A ci servirà per ricostruire il rettangolo di trasformazione delle circonferenze limite nei due ellissi ortogonali della costruzione precedente. Tracciamo il segmento A-B1 e la circonferenza che a questi due punti per diametro. Ora tracciamo la congiungente il centro C con il punto medio di A-B1; le intersezioni D ed E con la circonferenza ci danno le dimensioni delle circonferenze limite dell'ellisse e ci permettono di ricostruire il rettangolo di trasformazione A-D-B1-E. Gli assi dell'ellisse saranno paralleli ai lati



4

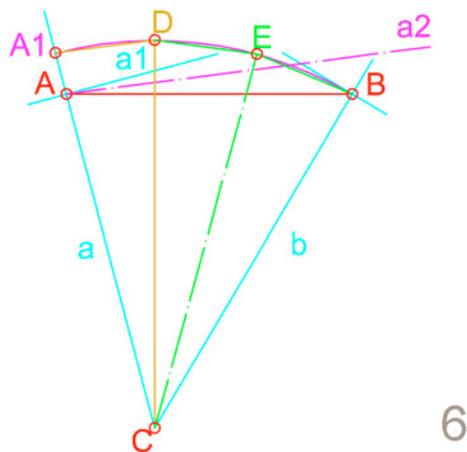
del rettangolo e passanti per il centro C (fig. 4). L'arco ellittico appare quello che risolve meglio il caso in cui le tangenti dei punti estremi del segmento non sono simmetriche rispetto all'asse e quindi non è possibile tracciare un arco circolare. Bisogna però constatare che la funzione ellittica comporta un appesantimento della struttura 'numerica' del file grafico, oltre al fatto che alcuni programmi di CAD non sono in grado di unire in un'unica *polyline* archi ellittici insieme a segmenti e archi circolari, che invece possono essere congiunti tra di loro. In conseguenza a ciò è preclusa, ad esempio, la possibilità di estrusione di una sagoma in cui ci siano tratti ellittici. AutoCAD, ad esempio, sino all'avvento della versione 13 (1994) non disegnava ellissi ma una combinazione di 16 archi circolari che simulavano con buona approssimazione la conica. Se da un lato questo non soddisfaceva i matematici - che non riscontravano la reale conica nel disegno fornito dal software - dall'altro la curva permetteva di essere tagliata e inserita nella sequenza di una polilinea, e quindi essere utilizzata nella formazione di una sagoma predisposta all'estrusione tridimensionale.



5

L'esigenza della successione di archi circolari è quindi oggi (a partire dal 1994) ancora presente e quindi abbiamo la necessità di 'simulare' la linea ellittica mediante una serie minima, ma efficace, di archi.

Il terzo metodo consiste quindi nella *congiunzione policentrica*. Prendiamo il segmento A-B con le tangenti 'a1' e 'b1' e le perpendicolari a e b (fig.5). Il numero minimo degli archi è due, quindi



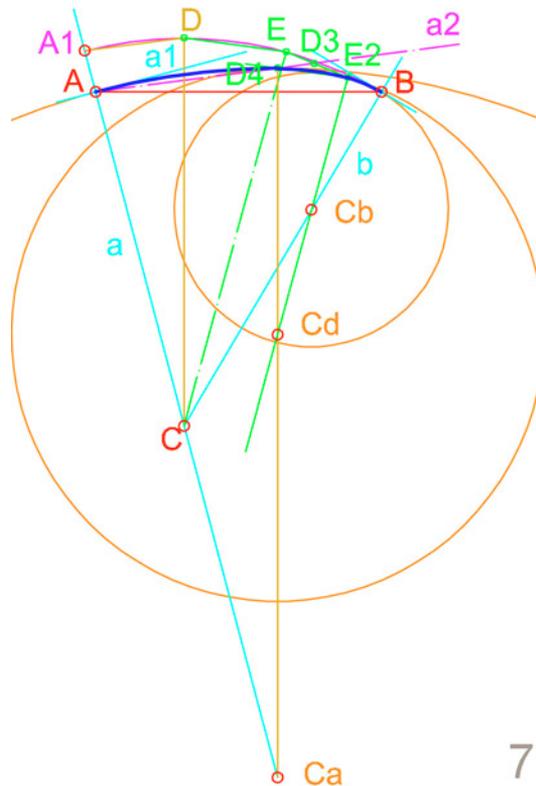
6

possiamo comporre la sequenza di due archi circolari strutturando due triangoli isoscele con due lati in comune e le basi con uno dei vertici coincidente con i punti estremi del segmento: le basi saranno corde dei due settori circolari.

Per l'intersezione C delle rette 'a' e 'b' tracciamo la circonferenza di raggio maggiore: supponiamo C-B, individuando il punto A1 su 'a'.

Dobbiamo ora dividere l'arco A1-B con due corde A1-D e D-B che saranno le basi della sequenza di due triangoli isoscele che compongono l'arco A1-B; i triangoli isoscele simili (con i lati paralleli) e passanti per A e B, comporranno la sequenza cercata. Il punto D potrebbe essere collocato in un punto qualsiasi dell'arco A1-B ma giacché la base A1-D dovrà essere traslata su A per la congiunzione policentrica questa dovrà avere, rispetto ad 'a', un angolo compreso tra a1-a e BAC.

Tracciamo quindi la retta a2, bisettrice (ma non necessariamente) dell'angolo a1-AB e la trasliamo su A1; si determina così il punto D sull'arco e con questo la seconda corda DB e il segmento radiale DC: lato comune dei due triangoli isoscele (fig.14). Trasliamo quindi DC per D2, intersezione



7

di DB con a2, individuando le intersezioni Ca e Cb con le rispettive rette (fig.15); questi sono i centri degli archi AD2 (Ca) e D2B (Cb) che comporranno la congiunzione policentrica cercata (fig. 5).

Con la variazione iniziale dell'inclinazione della retta a2 possiamo ottenere diverse sequenze avvicinandoci maggiormente alla curva ellittica. Volendo aumentare di un arco la congiunzione potremmo ottenere certamente un risultato migliore. Ripercorriamo le operazioni grafiche

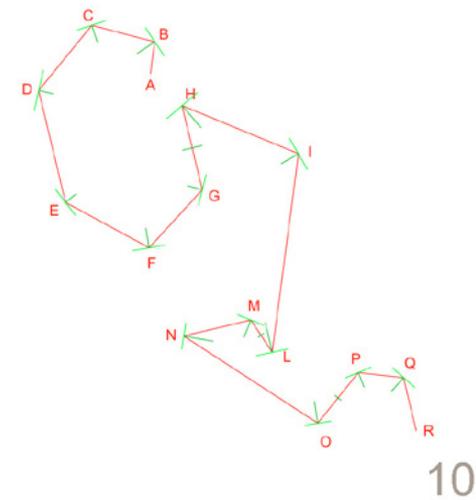
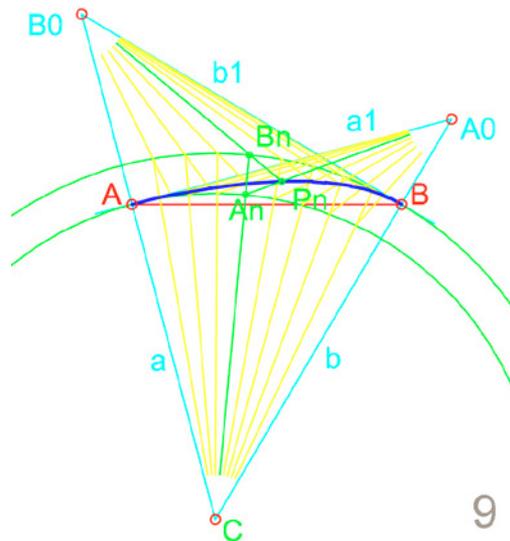
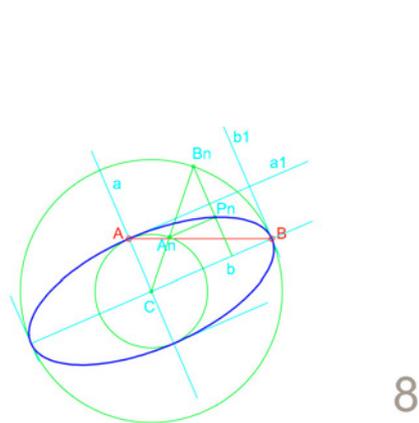
già fatte sino alla determinazione del punto D; ora dobbiamo aggiungere un punto E tra D e B. Tracciamo un raggio di centro C e individuiamo un punto E tra D e B; per semplicità utilizziamo la bisettrice (ma non è necessario) di DCB. Individuato E abbiamo completato la poligonale A1DEB (fig. 6). Ora dobbiamo traslare il lato DE in maniera da ricomporre la sequenza di basi dei triangoli isoscele tra A e B. Nominato D3 l'intersezione di a2 con EB, il terzo lato dovrà collocarsi (parallelamente a DE) tra D3 e B; scegliamo il punto centrale E2. Traslando DE su E2 ricaviamo l'intersezione D4 con a2 e pertanto trasleremo anche le rette radiali DC su D4 e EC su E2. Determiniamo così i vertici dei triangoli isoscele, nonché centri degli archi AD4 (Ca), D4E2 (Cd) e E2B (Cb) (fig. 7).

La congiunzione policentrica così ottenuta sarà senz'altro più vicina all'ellisse di quanto fosse l'arco a due centri, ma per avvicinarci ulteriormente possiamo sempre agire sull'inclinazione iniziale di a2 oppure, più semplicemente, variare la traslazione di DE. Se determiniamo prima l'arco ellittico possiamo regolare lo spostamento trovando quello che fornisce una posizione di D4 ed E2 più vicina all'ellisse reale.

Il quarto tipo di raccordo è una curva 'luogo geometrico di punti' e prende spunto dall'ellisse per punti trasformati.

Rivediamo quindi quella costruzione analizzandola secondo alcune relazioni geometriche che utilizzeremo poi per la nuova trasformazione.

Supponiamo di avere il segmento AB e di tracciare le due tangenti a1 e b1 ortogonali tra loro; disegniamo anche le rette radiali 'a' e 'b' chiaramente ortogonali alle prime, determinando così il centro C dell'arco ellittico. Tracciamo le due circonferenze (circoscritta e inscritta) di raggio CB e CA; ad ogni raggio corrisponderanno due punti An e Bn, di intersezione con gli archi, e tracciando le *rette di trasformazione* (perpendicolari all'asse relativo) otterremo il punto Pn trasformato dell'ellisse (fig. 8). Le rette di trasformazione sono quindi parallele rispettivamente alle coppie parallele a-b1 e b-a1. Se, ad esempio, percorriamo i punti della circonferenza interna da A, la retta di trasformazione parte da A in cui è tangente



all'ellisse sino ad arrivare in B1 dove trasforma B per il quale è ortogonale. Reciprocamente per la circonferenza esterna, partendo da B la retta di trasformazione è tangente e arriviamo ad A1 dove è perpendicolare alla curva. Ora torniamo al segmento iniziale e tracciamo le due tangenti ad A e B (a1 e b1) 'non' ortogonali, come del resto abbiamo fatto sino ad adesso per le altre costruzioni. Possiamo anche tracciare le rette 'a' e 'b' perpendicolari alle rispettive tangenti e individuare il centro C dal quale tracciare le circonferenze di raggi CA e CB (fig. 9). L'unica differenza, rispetto alla trasformazione 'affine' vista in precedenza sta nel fatto che le coppie b-a1 e a-b1 non sono parallele ma si intersecano nei punti A0 (su 'b') e B0 (su 'a'). Ad ogni retta radiale corrispondono due punti An e Bn, di intersezione con gli archi. Le rette di trasformazione saranno ora passanti per le intersezioni A0 (per An) e B0 (per Bn) generando così il punto trasformato Pn (fig. 9). In altre parole, le rette di trasformazione non concorrono in un centro improprio ma in uno proprio. La punteggiata così ottenuta descrive una curva contenuta tra le due circonferenze ed avente le caratteristiche sopra descritte di

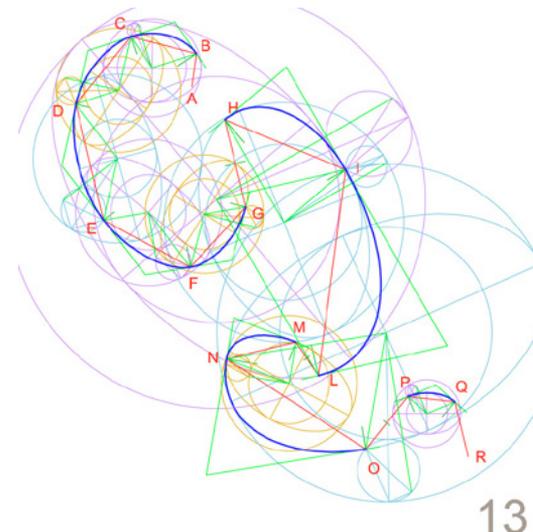
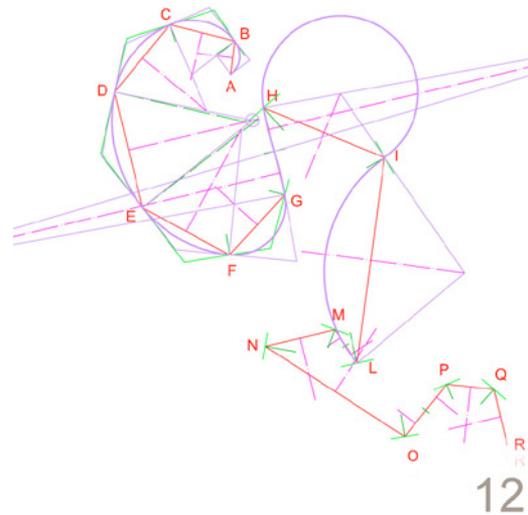
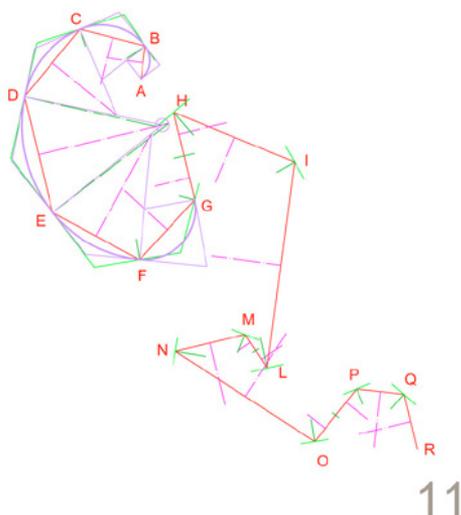
tangenza ed ortogonalità nei punti A e B già viste per l'ellisse. Questa costruzione, che potremmo chiamare, *congiunzione per trasformazione polare*, può rappresentare una ulteriore diversa soluzione 'geometrica' al problema iniziale.

3. APPLICAZIONE ALLA POLILINEA

Vediamo ora di applicare le costruzioni grafiche in una poligonale che presenti anche cambiamenti di concavità. La poligonale da A ad R infatti presenta alcuni tratti (G-H, L-M, O-P) in cui, cambiando la concavità, la linea curva dovrà necessariamente attraversare il segmento, che per uniformità stabiliremo sempre nel punto medio. Iniziamo anche a tracciare le tangenti ottimali alla spezzata, individuabili nelle perpendicolari alle bisettrici degli angoli interni (fig.10). Le condizioni che devono essere soddisfatte dalla linea curva sono, quelle di coerenza apparente con l'andamento della spezzata, e conseguentemente di mantenimento della continuità, rappresentata dalla tangente comune nel passaggio da una curva alla successiva.

Riguardo alla *congiunzione circolare*, individuiamo

l'unica condizione obbligata, e cioè gli assi dei lati sui quali determinare i vertici dei triangoli isosceli, centri degli archi (fig. 11). Una volta fissato un triangolo, quelli adiacenti hanno la posizione imposta dalle tangenti comuni e quindi non c'è possibilità di intervento se non nei punti di cambiamento di concavità. Conviene quindi iniziare dal lato centrale (più o meno) della prima sequenza A-G, ossia il lato E-D. Prolunghiamo sull'asse le perpendicolari alle tangenti, e dal punto medio tra i due punti trovati impostiamo il vertice del triangolo isoscele relativo. I triangoli adiacenti sono così definiti poiché hanno già definita la base (il lato della poligonale) e un lato, e con questo, per intersezione con il relativo asse, il vertice e quindi l'altro lato. Facilmente possiamo determinare la sequenza di triangoli e quindi di archi circolari da A a G. Si può notare che però, più ci si allontana dal lato iniziale più gli archi possono discostarsi dalle ideali tangenti inizialmente definite, a tal punto che si possono verificare anche cambi di concavità non dovuti alla disposizione dei punti ma alla combinazione in sequenza dei triangoli isosceli; ciò non è quindi congruente con la disposizione dei vertici della



poligonale di base. In parte si può certo intervenire modificando la geometria del triangolo definito per primo ma per poligonali estese ciò non riesce, in ogni caso, ad evitare del tutto distorsioni anche notevoli. Nel nostro esempio giunti nel tratto G-H, dove la poligonale cambia concavità, il doppio arco risultante dalla costruzione è molto vicino al lato, e ciò provoca una eccessiva estensione verso l'esterno dell'arco relativo al lato H-I con la conseguente inversione della concavità nel tratto successivo I-L (fig. 12). Le conseguenze sul resto della poligonale risultano quindi del tutto incoerenti con l'andamento dei vertici e dei segmenti che li collegano. In conclusione la congiunzione circolare risulta molto semplice da realizzare ma non soddisfa tutte le esigenze di relazione tra i punti di una sequenza orientata e la sua trasformazione in una linea curva.

Se ora torniamo alla poligonale iniziale, dotata di tangenti per ogni vertice, possiamo costruire un insieme di *congiunzioni ellittiche* come descritto sopra (fig.13). Rimangono da 'connettere' i lati terminali, che potranno essere congiunti con un tratto circolare, e quelli di cambiamento di concavità; per questi ultimi dobbiamo decidere

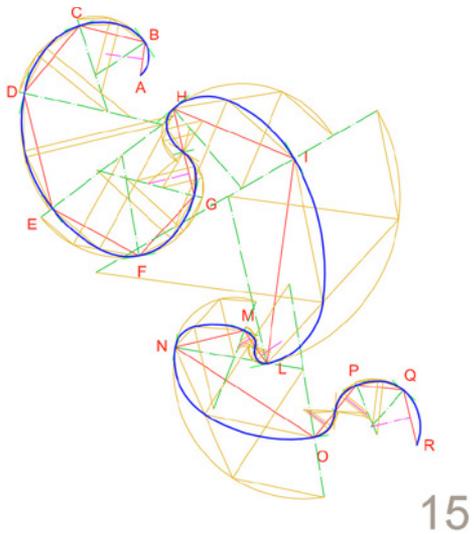
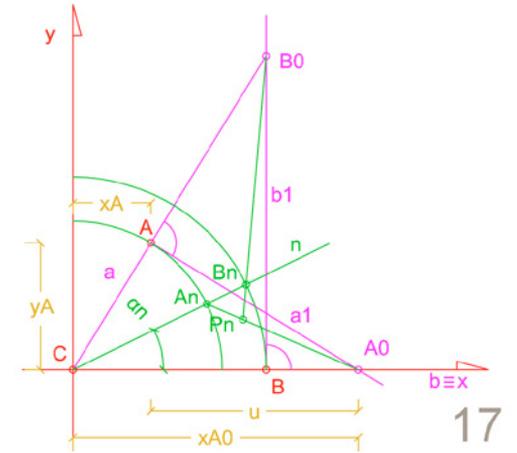
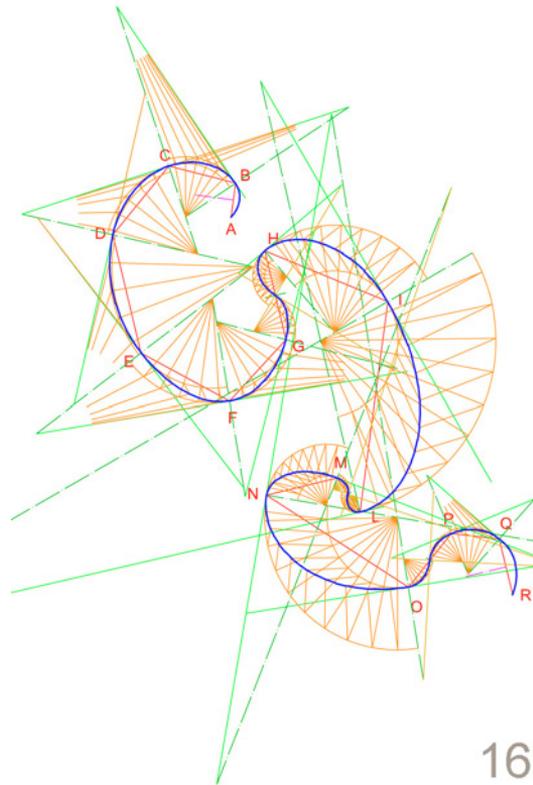
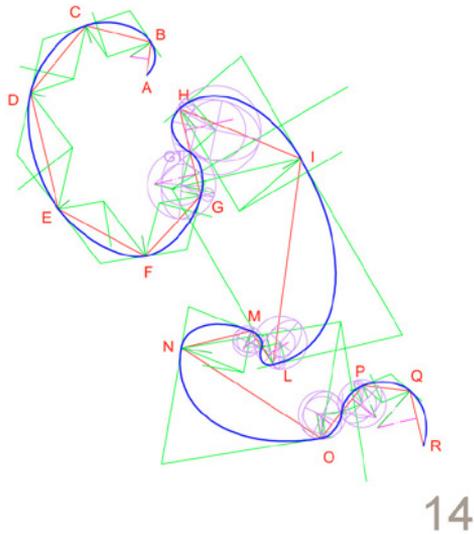
l'inclinazione della tangente locale nel punto di flesso ipotizzato nel punto medio del segmento. Una costruzione può impostarsi come bisettrice dei lati dei due triangoli isosceli costruiti come continuazione circolare teorica dei due rami ellittici insistenti sul segmento. Ad esempio per G-H, nominato G1 il punto centrale tracciamo i lati del teorico triangolo isoscele con base G1-H, del quale abbiamo il lato convergente in H e analogamente operiamo sulla base G-G1 del quale abbiamo il lato convergente in G. I due lati che convergono in G1 non saranno allineati ma ammetteranno una bisettrice e la sua ortogonale che rappresenterà la tangente locale ai due rami ellittici che formeranno il cambiamento di concavità (fig. 14). La costruzione riprodotta per i lati di flesso completerà la trasformazione. La curva ellittica soddisfa completamente le esigenze di coerenza dettate dall'andamento della spezzata. La necessità di una più semplice costruzione, composta da soli archi circolari, ci porta alla successiva costruzione.

Preso la poligonale iniziale, applichiamo la *congiunzione policentrica* (a due centri) per i lati a concavità costante e i tratti ad arco unico per

i lati terminali. Per i flessi determineremo come nel caso precedente la tangente e traceremo poi la perpendicolare costruendo così i due tratti ognuno composto da due archi circolari (fig. 15). Questa costruzione unisce la semplicità costruttiva degli archi circolari alla similitudine con la combinazione di tratti ellittici, rispettando così le condizioni imposte di passaggio per i punti dati e di tangenza con le ortogonali alle bisettrici. Vediamo ora l'ultima costruzione applicando la *congiunzione per trasformazione polare* (fig. 16). La realizzazione di questa curva è diversa dalle altre poiché in pratica realizza una nuova spezzata che ha poi la necessità di essere a sua volta resa curva con le apposite funzioni dei programmi CAD. La bontà del risultato dipende dal numero di punti con il quale si riesce a descrivere questa linea curva.

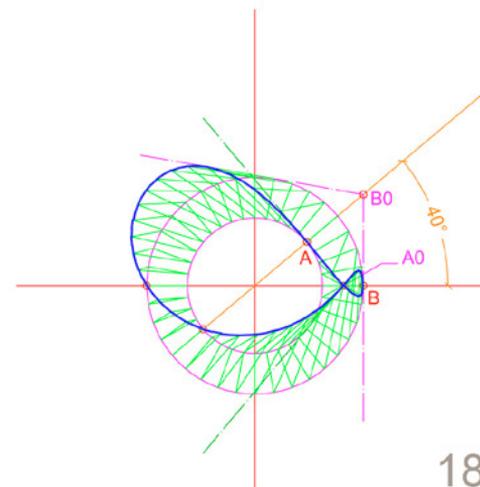
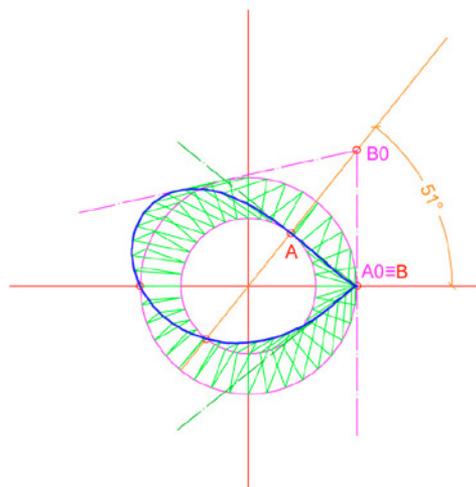
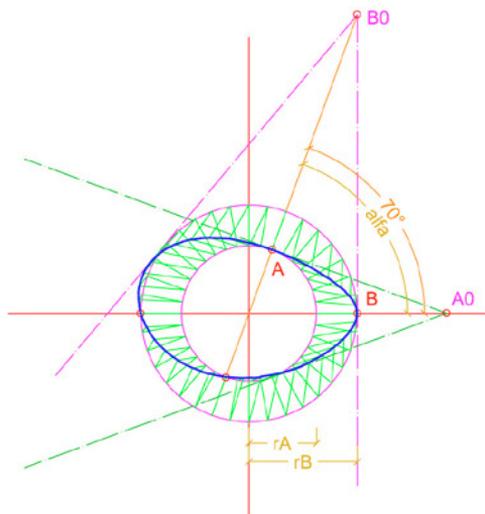
4. COSTRUZIONE ANALITICA

Nonostante l'originalità delle costruzioni proposte, che comunque si rifanno a concetti geometrici ben conosciuti, quest'ultima risulta del tutto nuova, e quindi si suggerisce un ulteriore approfondimento analitico.

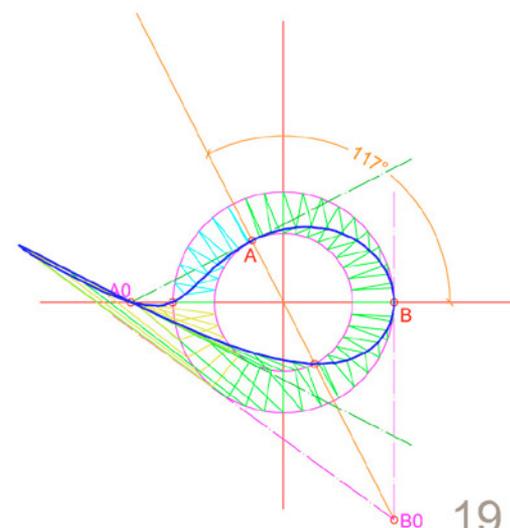
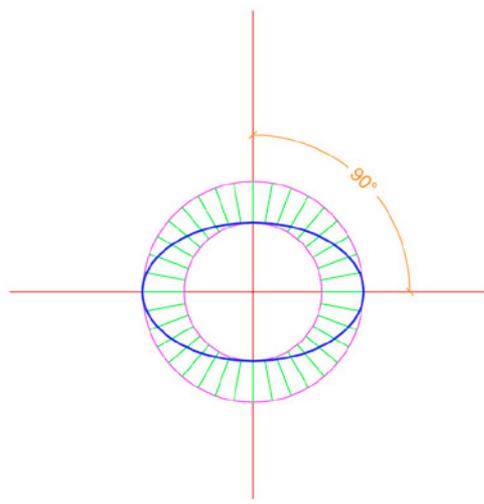
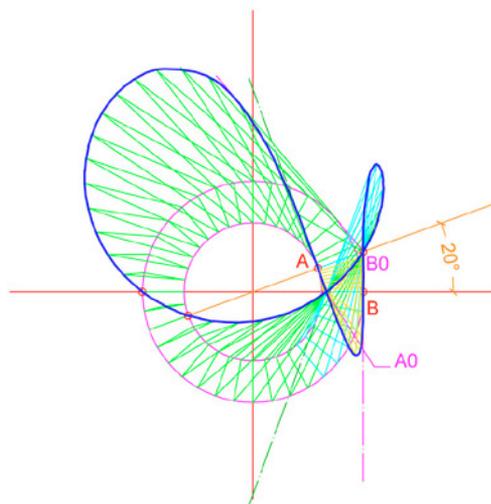


Per semplificarne la comprensione si è riferita la *coniunzione* ad un sistema di assi cartesiani con origine nel punto comune alle rette radiali C, e con uno dei vertici del segmento A-B appartenente ad uno degli assi cartesiani. Abbiamo quindi (fig. 17): C (0,0) ; B (xB,0) ; A (xA,xB)
Abbiamo quindi le rette radiali: 'a' individuata dal segmento CA; e 'b' individuata da CB. Le tangenti locali saranno: b1 per B, parallela ad 'x' e a1 per A ortogonale ad 'a'.

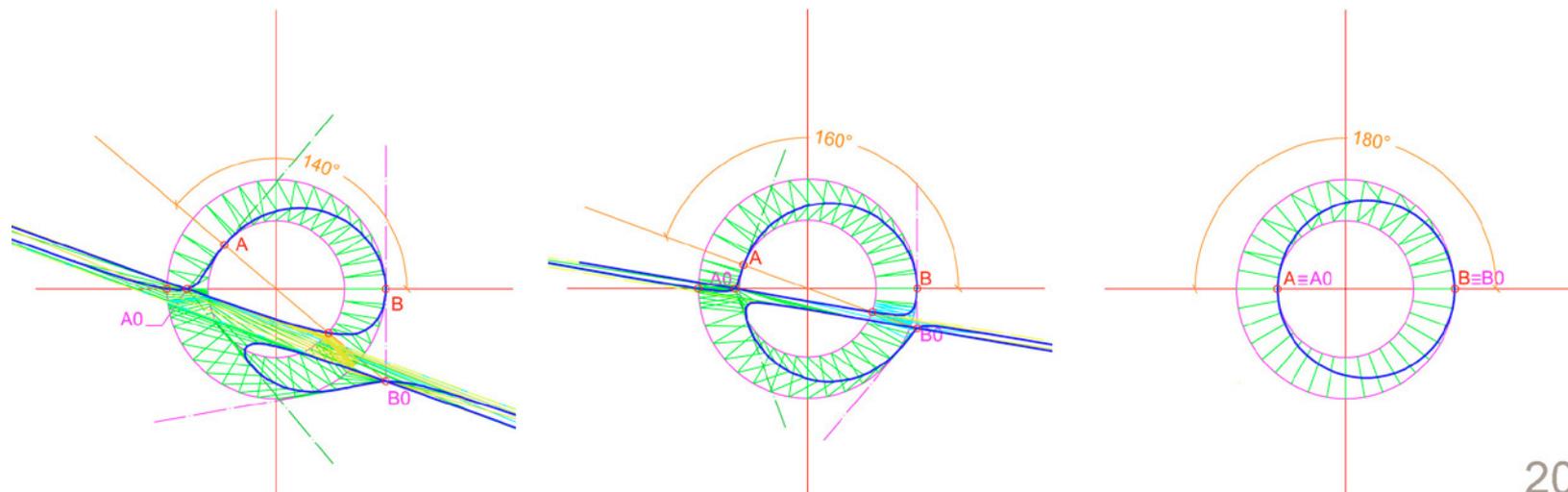
Dobbiamo ora individuare le coordinate dei poli A0 e B0 rispettivamente su 'x' e su 'a'.
Con una semplice proporzione constatiamo che:
 $x_A : x_B = y_A : y_{B0}$
pertanto :
 $y_{B0} = x_B \cdot y_A / x_A$; $x_{B0} = x_B$
Per x_{A0} osserviamo che nel triangolo rettangolo C-A-A0, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra i segmenti staccati su di essa ;
abbiamo quindi che:



18



19



20

$x_A : y_A = y_A : u$

quindi:

$$x_{A0} = (y_A * y_A / x_A) + x_A$$

Ora tracciamo le circonferenze di raggio CA e CB. Ogni raggio n di centro C intersecherà le due circonferenze nei punti An e Bn. Il punto trasformato Pn è l'intersezione delle rette proiettanti i punti An da A0 e Bn da B0.

Analiticamente sappiamo che, con un angolo di apertura di n rispetto a 'x' pari a β (espresso in π radianti), le coordinate di An e Bn sono:

$$x_{An} = CA \cos \beta ; y_{An} = CA \sin \beta$$

$$x_{Bn} = x_B \cos \beta ; y_{Bn} = x_B \sin \beta$$

Sappiamo che l'equazione di una retta passante per due punti, elaborata nella forma $y=mx+q$ è:

$$y = [(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)] * x + [(x_2 * y_1 - x_1 * y_2)/(x_2 - x_1)]$$

Pertanto, l'equazione per B0-Bn sarà:

$$y = [(y_{B0} - y_{Bn})/(x_B - x_{Bn})] * x + [(x_B * y_{Bn} - x_{Bn} * y_{B0})/(x_B - x_{Bn})]$$

e analogamente per A0-An avremo:

$$y = [-y_{An}/(x_{A0} - x_{An})] * x + [(x_{A0} * y_{An})/(x_{A0} - x_{An})]$$

Sapendo che l'intersezione di due rette è data dalle espressioni:

$$x = (q - q') / (m' - m) ; y = m * (p - p') / (m' - m) + q$$

e indicando con pAn e pBn le rispettive rette

proiettanti avremo:

$$x_{Pn} = (q \cdot p_{An} - q' \cdot p_{Bn}) / (m \cdot p_{Bn} - m' \cdot p_{An}) ; y_{Pn} = m \cdot p_{An} * (p \cdot p_{An} - p' \cdot p_{Bn}) / (m \cdot p_{Bn} - m' \cdot p_{An}) + q \cdot p_{An}$$

La curva cercata è quindi il luogo dei punti Pn compresi tra A e B.

Andiamo a vedere le variazioni 'formali' della funzione ora descritta estendendola ai quattro quadranti degli assi cartesiani al variare dei parametri che la definiscono.

Abbiamo stabilito che C si trova nell'origine degli assi. B è un punto dell'asse x, a cui diamo un valore arbitrario (8) corrispondente al valore rB: distanza di B da C. A è un punto qualsiasi del piano cartesiano con coordinate (x, y) dipendenti da due parametri: rA (distanza di A da C) e α (angolo individuato da CA in senso antiorario da x). Il valore di rA (CA) si stabilisce arbitrariamente inferiore a rB (5) ma il risultato complessivo non cambierebbe.

Iniziamo ad osservare la funzione per $\alpha = 70^\circ$; la forma si presenta ovoidale, passante per i punti A e B e per i loro opposti sulle rispettive circonferenze e sulle corrispondenti rette radiali (fig. 18).

Diminuendo α si giunge alla condizione in cui

il polo A0 si avvicina a B sino a coincidere; in questa condizione la curva viene ad avere in $B \equiv A0$ un punto angoloso (fig. 18). Diminuendo ulteriormente α , A0 si trova all'interno della corona circolare e il punto angoloso produce un nodo con l'anello all'interno della corona e tangente a B-B0 (fig. 18). All'ulteriore diminuzione di α la convessità superiore del nuovo anello si avvicina a B0 per diventare un punto spigoloso nella sua corrispondenza; dopo di che si forma un terzo nodo con un anello verticale (fig. 19).

La curva che descrive la forma iniziale della funzione ha un tratto inferiore, convesso verso il basso, approssimativamente circolare. Per $\alpha \rightarrow 0$, la curva pseudo-circolare sale avvicinandosi a C e l'intera funzione tende ad assumere forma circolare con raggio $\rightarrow h$ identificandosi quindi con l'asse x.

Tornando alle condizioni iniziali ($\alpha = 70^\circ$) aumentiamo l'angolo sino a 90° , condizione nella quale avremo la classica ellisse per punti trasformati (fig. 19).

All'aumentare di α si ottiene di nuovo una forma ovoidale sino a quando la retta A0-B0 non risulta tangente alla circonferenza maggiore (rB); a

questo punto in A0 si forma una cuspidale che poi si trasforma in nodo con un anello molto schiacciato (fig. 19).

All'ulteriore progredire di α si giunge ad una condizione in cui vi è una coppia di rette radiali a cui corrispondono due rette di trasformazione (per A0 e B0) parallele; queste sono asintoti dell'anello allungato all'infinito che forma quindi un secondo ramo opposto al primo con la formazione di un'ulteriore nodo in B0 ed un anello opposto alla forma principale della funzione (fig. 20).

Con $\alpha \rightarrow \pi$ (180°) la funzione assume una forma circolare divisa dai due asintoti. Per $\alpha = \pi$ abbiamo una circonferenza di diametro A-B (coincidenti con A0 e B0) (fig. 20).

5. CONCLUSIONI

A parte la novità di questo ultimo 'luogo geometrico', ritengo che la costruzione più utile sia quella policentrica della quale abbiamo applicato solamente quella a due settori circolari ma che può essere sviluppata, come abbiamo visto, in maniera esponenziale.

Uno sviluppo possibile di tale concetto potrebbe essere proficuamente applicato nello spazio, ma non per le superfici rigate delle quali è implicita la realizzazione con l'estrusione della curva bidimensionale. Tanto nel rilievo quanto nel progetto, siamo circondati da superfici spaziali descritte da poliedri, nella maggior parte composti da unità triangolari.

Nella scansione LASER la serie di punti registrati dallo strumento, la 'nuvola', viene trasformata in una superficie spaziale composta di unità triangolari: le mesh. Certamente in questo caso

la sovrabbondante quantità di punti fa sì che il risultato appaia come una superficie continua.

Nel campo delle realizzazioni, la memoria ci porta alla mente le cupole geodetiche ideate da Richard Buckminster Fuller negli anni '50. Questo tipo di struttura era basato sul principio dei poliedri ed era applicato nella costruzione di forme sferoidali. I concetti di Fuller sono stati sviluppati poi soprattutto dal movimento progettuale a cui hanno fatto riferimento gli architetti 'organici' e non solo, sino ai giorni nostri. Esempi li troviamo in progettisti dalle diverse caratteristiche come Pierluigi Nervi (Aviorimessa di Orbetello, 1939), Luigi Pellegrin (Concorso per l'Operà di Parigi, 1983), Jürgen Mayer-Hermann (Metropol Parasol, Siviglia, 2011), Santiago Calatrava (Città della scienza, Valencia, 1991), Norman Foster (Swiss Re Tower, Londra, 2004), Frank Gehry (Richard B. Fisher Center, New York, 2003).

Superfici spaziali, quindi, descritte principalmente da unità semplici, assemblabili possibilmente fuori opera; ma le casistiche sono molteplici.

Un'idea 'costruttiva' potrebbe consistere nel trasformare i lati lineari degli elementi in archi di circonferenza e quindi in calotte sferiche; nell'intento di riuscire a 'costruire' superfici composte da elementi sferoidali la cui combinazione generi una superficie continua.

Si otterrebbe così che da una serie di punti nello spazio, che descrivono una determinata superficie - non più uniti da strutture rettilinee ma da archi circolari - sarebbe materializzata da una successione di elementi sferoidali.

Ma questo è un programma futuro.

BIBLIOGRAFIA

La particolarità e l'originalità delle costruzioni dell'argomento trattato non si basa su precedenti ricerche mentre trova base teorica nelle pubblicazioni appresso elencate.

Masotti Biggiogero, Giuseppina (1980), *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Masson Italia Editori, Milano.

Piccato, Alfredo (1987), *Dizionario dei termini matematici*, Rizzoli, Milano.

Carpiceci, Marco (1994), *Una nuova funzione CAD per disegnare ellissi*, "Istruzione tecnica e professionale", terza serie - 4, V, Fratelli Palombi Editori, Roma.

Carpiceci, Marco (1996), *Disegnare ellissi con AutoLISP*, "Mondo AutoCAD", VIII, 5 (Novembre), Franco Ziviani, Milano.

Carpiceci, Marco (1996), *Rilievo e prospettive di una conica*, "Disegnare Idee Immagini", VII, 13, pp. 51-60, Gangemi Editore, Roma.

Brencich, Antonio (2010), dispensa del corso di "Costruzioni di Infrastrutture per i Trasporti", Laurea Specialistica in Ingegneria dei Trasporti e della Logistica, Università degli Studi di Genova, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, dispensa on-line: ww2.dicat.unige.it/studenti/Infrastrutture_Trasporti_1/Parte5.pdf.

Ragazzo, Felice (2012), *Curve policentriche*, Prospettive Edizioni, Roma.