

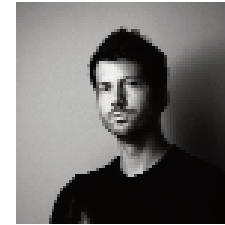
## Monge e il problema del vertice di piramide: una applicazione alla restituzione di quote e volumi da una fotografia del 1892

### *Monge and the three point space resection problem: an application to the reconstruction of heights and volumes from a photograph of 1892*

Lo scopo della restituzione della fotografia in esame è la ricostruzione dei volumi, oggi perduti, disposti oltre la strada che attraversa il borgo, sulla sinistra della foto. La restituzione di punti nello spazio da immagini bidimensionali è possibile se queste sono di natura proiettiva e si dispone di almeno due stelle proiettive orientate. La prima immagine è la foto d'epoca, la seconda si ricostruisce da una foto aerea della AM del 1938 e dal rilievo delle murature ancora presenti sul luogo. Per il rilievo, l'una delle due stelle proiettive si assimila ad una classe di rette verticali. Per la fotografia, il problema si scompone nelle due fasi tipiche dei procedimenti fotogrammetrici: l'orientamento interno e l'orientamento assoluto. Per l'orientamento assoluto è stato usato il metodo del vertice di piramide che, in uso già dal XVIII sec., consiste nel determinare il centro di proiezione dati tre punti dei quali sia nota la posizione nello spazio.

*The purpose of photogrammetric restitution is the reconstruction of the volumes, now lost, located along the road that crosses the village, on the left side of the photo. The reconstruction of points in space from two-dimensional images is possible if these photos are projective figure and we have at least two projective oriented stars. The first image is a vintage photograph, the second is a figure reconstructed from an aerial photo of AM in 1938 and from the survey of the masonry still present at the site. For the survey, one of the two projective stars is assimilated to a class of vertical straight lines. With regard to photography, the problem is decomposed into two typical phases of photogrammetric processes: the internal orientation and the absolute orientation. For the absolute orientation we used the method of the pyramid vertex which, in use since the Eighteenth Century, consists in determining the projection center from three given points of which are known the positions in space.*

<http://disegnarecon.unibo.it>



#### Federico Fallavollita

Architetto, è Ricercatore di Disegno presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Bologna. Si occupa di geometria descrittiva e del suo rinnovamento attraverso i metodi della rappresentazione digitale, e di rilievo strumentale digitale: [www.unibo.it/docenti/federico.fallavollita](http://www.unibo.it/docenti/federico.fallavollita)



#### Riccardo Migliari

È Professore Ordinario alla "Sapienza" dal 1990. Dal 2003 è impegnato negli studi per il rinnovamento della geometria descrittiva. Alcuni dei suoi lavori sono pubblicati ai seguenti indirizzi: <http://riccardo.migliari.it> e <http://w3.uniroma1.it/riccardomigliari/Ref/Default.aspx>.



#### Marta Salvatore

Architetto, è Dottore di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente. Si interessa delle discipline della rappresentazione con particolare riferimento alla geometria descrittiva e al suo rinnovamento attraverso i metodi digitali della rappresentazione. Pubblica a riguardo diverse memorie in parte consultabili su: [www.martasalvatore.it](http://www.martasalvatore.it)

**Parole chiave:** prospettiva, restituzione prospettica, metodo del vertice di piramide  
**Keywords:** perspective, perspective reconstruction, method of the pyramid vertex

## PREMESSA

Molto si è detto e scritto sul ruolo di Gaspard Monge nella Storia della rappresentazione, a volte attribuendogli la 'invenzione' della geometria descrittiva, a volte riducendo, forse anche ingiustamente, il suo merito a quello di curatore di un libro già scritto nel corso dei secoli precedenti.

Ma, al di là di questa difficile valutazione, non vi è dubbio che deve essere riconosciuto a Monge il merito di avere conferito alla rappresentazione degli oggetti a tre dimensioni dignità di scienza. Questa possibilità, già avvertita distintamente da Frézier come esigenza dell'ingegneria e dell'architettura, non era stata, prima di Monge, espressa in modo altrettanto esplicito, neppure nell'opera di Sylvestre François Lacroix che pure ha preceduto, com'è noto, la pubblicazione delle lezioni mongiane.

In questo suo sforzo per teorizzare e dare validità generale a procedimenti fino ad allora circoscritti alla stereotomia, al defilamento, alla gnomonica (cioè a casi particolari), Monge ha cercato una sintesi tra lo studio analitico delle forme geometriche e delle loro proprietà e la rappresentazione grafica, perciò visiva, delle medesime forme e proprietà, nella convinzione che la combinazione dei due metodi potesse dare nuovo impulso alla geometria (... *Il seroit à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble...* - Monge 1798, p. 16).

Curiosamente, a distanza di due secoli dall'età d'oro della Géométrie Descriptive, questo auspicio di Monge sembra realizzarsi nella rappresentazione matematica dell'universo digitale. Infatti, come abbiamo più volte osservato, l'accuratezza che il calcolo conferisce alla rappresentazione digitale, la possibilità di costruire forme a tre dimensioni, la possibilità di usare le coniche e le superfici algebriche come strumenti nella costruzione geometrica, unite alla potenza della analogia visiva, permettono di sperimentare la lungimirante visione di Monge.

Nello studio qui presentato l'esperimento riguarda la soluzione del problema del vertice di piramide, trattato da Monge nella sezione V delle Leçons de Géométrie Descriptive e qui applicato alla ricostruzione dei volumi di un agglò-

merato d'interesse storico parzialmente perduto. Significativo è il fatto che la soluzione grafica, ovvero analogica, del problema permette di correggere un errore nel quale incorre lo stesso Monge, errore peraltro già evidenziato da Loria, relativo al numero di soluzioni ammesse dal problema (Loria 1921, p.115).

## IL CASO DI STUDIO

Lo scopo della restituzione metrica della fotografia qui riprodotta, è quello di ricostruire i volumi, oggi perduti, della cartiera, che compaiono a sinistra di chi guarda, oltre la strada che attraversa il borgo di Grottaferrata.

In linea teorica la restituzione di punti nello spazio, da loro immagini bidimensionali, è possibile alle seguenti condizioni:

- che le immagini siano di natura proiettiva;
- che si disponga di almeno due stelle proiettive orientate.

Ciò significa che le immagini di cui si dispone debbono derivare da operazioni di proiezione e sezione (ottiche o geometriche) e che si deve conoscere la posizione, nello spazio, delle immagini e dei relativi centri di proiezione. Ad esempio, se si hanno due fotografie e si possono disporre nello spazio nella posizione che occupavano, al momento dello scatto, i due apparecchi fotografici, è possibile intersecare le due stelle di rette che hanno centri nelle ottiche degli apparecchi, per ritrovare, in vera forma e grandezza, i punti che appartengono all'oggetto rappresentato.

Nella situazione in esame, la prima immagine è costituita da una fotografia del 1892, la seconda si può ricostruire a partire da una fotografia area della AM del 1938 e dal rilievo delle murature e dagli spiccati ancora in parte presenti sul luogo. La ricostruzione delle stelle proiettive è diversa nei due casi.

Per quanto riguarda il rilievo, si può assimilare la stella ad una classe di rette verticali, e lo stesso si può fare, con buona approssimazione, per la foto aerea, considerati: la quota del volo della AM, da

un lato, e il fatto che si considera una piccola porzione del fotogramma, dall'altro. Grazie al rilievo, questa stella si può anche considerare orientata, ovvero collocata nello spazio nella giusta posizione. Per quanto riguarda la prima immagine, invece, e cioè la fotografia del 1892, il problema è più complesso e deve essere scomposto nelle due fasi tipiche dei procedimenti fotogrammetrici: l'orientamento interno e l'orientamento assoluto del fotogramma.

L'orientamento interno consiste nel determinare la posizione del centro di proiezione rispetto al fotogramma. L'orientamento assoluto consiste nel determinare la posizione, nello spazio e rispetto ai volumi esistenti, del fotogramma e del centro di proiezione al momento della ripresa.

La soluzione di questi due problemi consente di ricostruire completamente la stella proiettiva e perciò di restituire la posizione nello spazio di punti dei quali si possiede l'immagine storica, ma che non esistono più nella realtà.

Nella restituzione fotogrammetrica, come in qualsiasi altra attività di natura scientifica, si possono seguire procedimenti di carattere deterministico, come procedimenti di carattere probabilistico. Nel primo caso, avendo a disposizione dati affidabili e condizioni sufficienti si perviene al risultato senza incertezze. Nel secondo caso, quando i dati non sono totalmente affidabili e le condizioni insufficienti, si può ottenere comunque un risultato convincente, attraverso un processo iterativo, nel quale le ipotesi che integrano i dati di cui si dispone, vengono introdotte nell'intero processo e i risultati che forniscono sono messi a confronto con i risultati delle iterazioni precedenti. In questo processo si scartano le ipotesi che generano, nella iterazione, risultati peggiori e si conservano quelle che forniscono risultati migliori, convergendo così verso la soluzione.

Nel caso in esame non è possibile applicare un processo deterministico, perché i dati sono insufficienti. E' possibile, tuttavia, ricostruire la stella proiettiva e il suo orientamento nello spazio per approssimazioni successive, convergenti verso un

risultato avvalorato dalla riduzione dell'errore. Si tratta, cioè, di formulare un'ipotesi, e di mettere tale ipotesi a confronto con i risultati che può fornire nell'intero processo. La presenza dei volumi ancora integri consente, infatti, di orientare la stella e controllare che il maggior numero possibile di punti rappresentati nella fotografia collimino con i corrispondenti punti reali.

Le ipotesi che verranno assunte, rispetto ad altre possibili, sono quelle che, nelle verifiche sperimentali hanno dato gli esiti migliori e cioè gli errori più piccoli.

### ORIENTAMENTO INTERNO DELLA FOTOGRAFIA DEL 1892

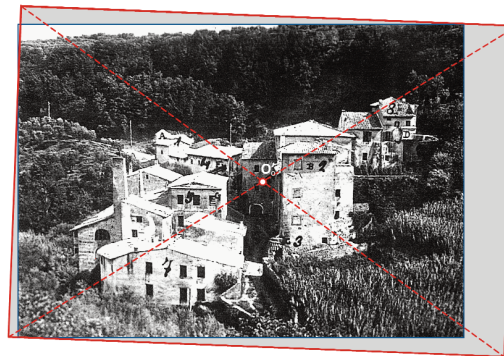
L'orientamento interno di una fotografia è noto quando si conoscono:

- il punto principale, cioè il punto in cui l'asse ottico della camera interseca il piano della lastra fotografica;
- la lunghezza focale, cioè la distanza del centro di proiezione (che è il secondo punto nodale dell'obiettivo) dalla lastra.

Se la fotografia è stata stampata per intero, cioè senza tagli che abbiano alterato la forma della lastra e se non sono state applicate traslazioni o rotazioni reciproche dell'ottica e della lastra (come può avvenire nelle camere da studio) il punto principale si trova nella intersezione delle diagonali del fotogramma.

Nel caso in esame, il formato originale è stato alterato in sede di stampa, come si può osservare considerando l'angolo superiore sinistro dell'immagine, il cui bordo è spezzato. Si può dunque presumere che il tratto del bordo più alto appartenga alla lastra originale, mentre il tratto inferiore sia il risultato di un taglio che è stato adottato per allineare approssimativamente l'orizzonte e le verticali ai bordi della stampa.

Per quanto riguarda il rapporto tra i lati della lastra originale, non è facile formulare un'ipotesi, perché le macchine dell'epoca, di costruzione artigianale, adottavano vari formati. L'archivio del conte Primoli (1851- 1927), ad esempio, è costi-



1. Fotografia del 1892, ricostruzione della lastra originale.

tuito per lo più da lastre quadrate, mentre molti apparecchi da campagna del tempo, utilizzano lastre i cui lati stanno nel rapporto 3:2.

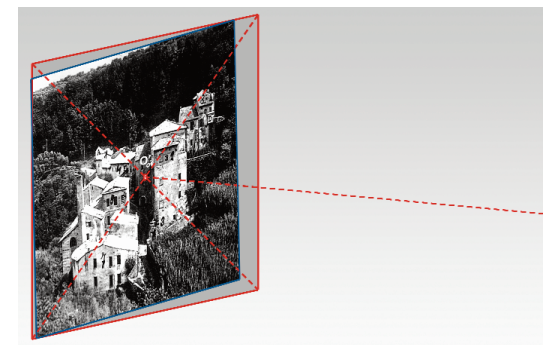
La fotografia che stiamo esaminando ha i lati che stanno nel rapporto 23.9:16.8, che è diverso sia dal rapporto 4:3 (ovvero 24:18), sia dal rapporto 3:2 (ovvero 24:16). Perciò sono state verificate entrambe le ipotesi.

Illustriamo qui quella che ha condotto ai risultati migliori.

È stato costruito un rettangolo i cui lati stanno nel rapporto 3:2, e il cui lato sinistro coincide con il breve segmento della lastra originale che si vede, come si è detto, in alto a sinistra. Gli altri lati del rettangolo sono tali da comprendere l'immagine per intero (fig. 01).

Si può dunque formulare l'ipotesi che il punto principale si trovi nella intersezione delle diagonali del rettangolo come sopra costruito. Se così è, il centro di proiezione si troverà sulla perpendicolare al piano della lastra che ha piede nel punto principale (fig. 02).

Gli apparecchi del tempo utilizzavano, per la



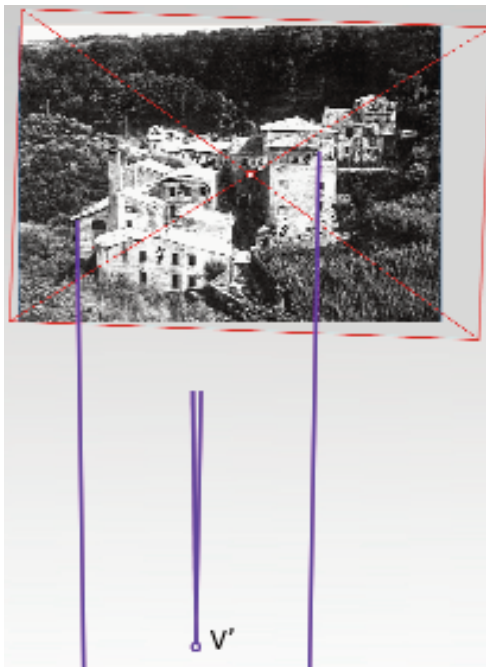
2. Asse focale al quale appartiene il centro di proiezione.

messa a fuoco, una slitta che permetteva un'ampia escursione dell'obiettivo davanti alla lastra. Dunque la lunghezza focale non può essere stabilita a priori, neppure in modo approssimativo. È possibile, tuttavia, sfruttare la conoscenza di alcuni angoli. Infatti il centro di proiezione dovrà essere tale da vedere la direzione delle rette e la giacitura dei piani del costruito, sotto l'angolo che essi formano nella realtà.

Il più importante di questi angoli è quello che la direzione del filo a piombo forma con la giacitura orizzontale. Nella fotografia, la direzione delle verticali si proietta nel punto di fuga degli spigoli verticali degli edifici e può essere ritrovata con buona approssimazione nel punto V' (fig. 03).

Non altrettanto sicura è la ricostruzione dell'orizzonte, perché la lastra è inclinata, e perciò l'orizzonte medesimo non passa per il punto principale, e perché non si trovano immagini di coppie di rette sicuramente orizzontali e parallele. Si può, però, esser certi che l'orizzonte si troverà al disopra degli edifici, e al disotto del limite che separa il bosco retrostante dal cielo.

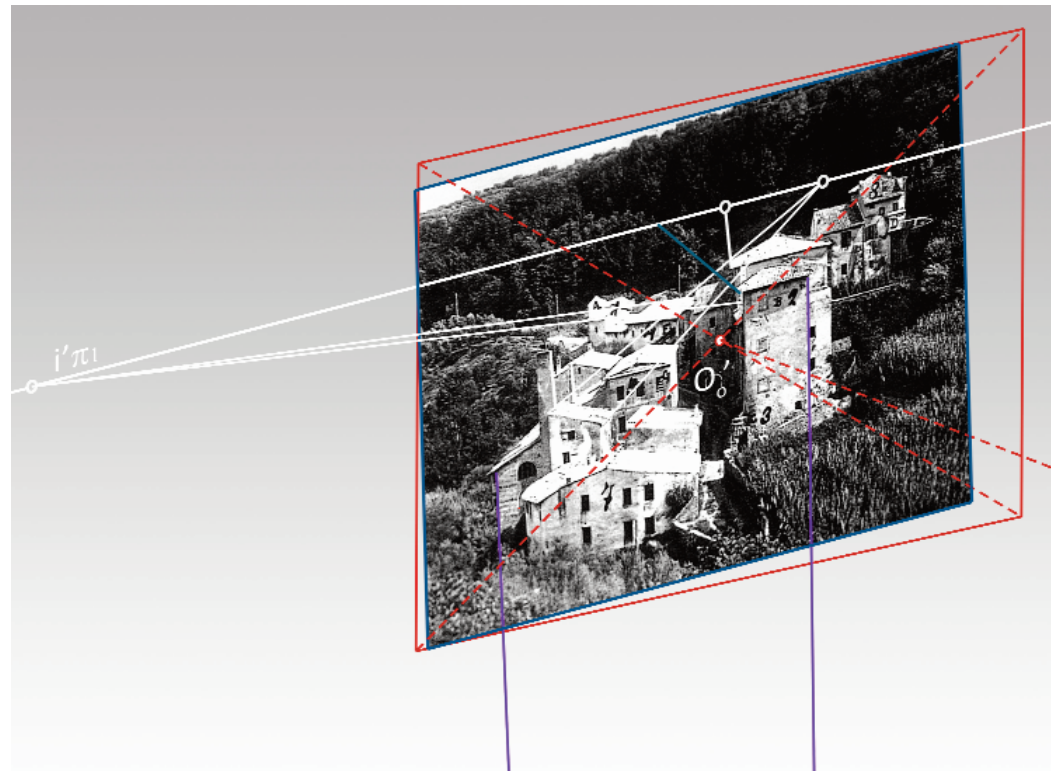
Le verifiche condotte su diverse ipotesi comprese



- 3. Punto di fuga delle verticali.
- 4. Individuazione dell'orizzonte.

in questa fascia del piano prospettico hanno premiato la soluzione adottata (fig. 04).

Si può inoltre considerare l'angolo formato dai due corpi di fabbrica di maggiore importanza: quello che comprende la chiesa (A) e quello che comprende il torrino (B). Questo angolo, dedotto dal rilievo, è pari a 34 gradi sessa decimali (o al suo supplemento). Perciò, rintracciate sull'orizzonte le immagini delle direzioni delle rette orizzontali che appartengono ai due piani, si può costruire il luogo geometrico dei punti dello spazio capaci dei suddetti angoli, che è una superficie di rivoluzione (toro) e determinare il



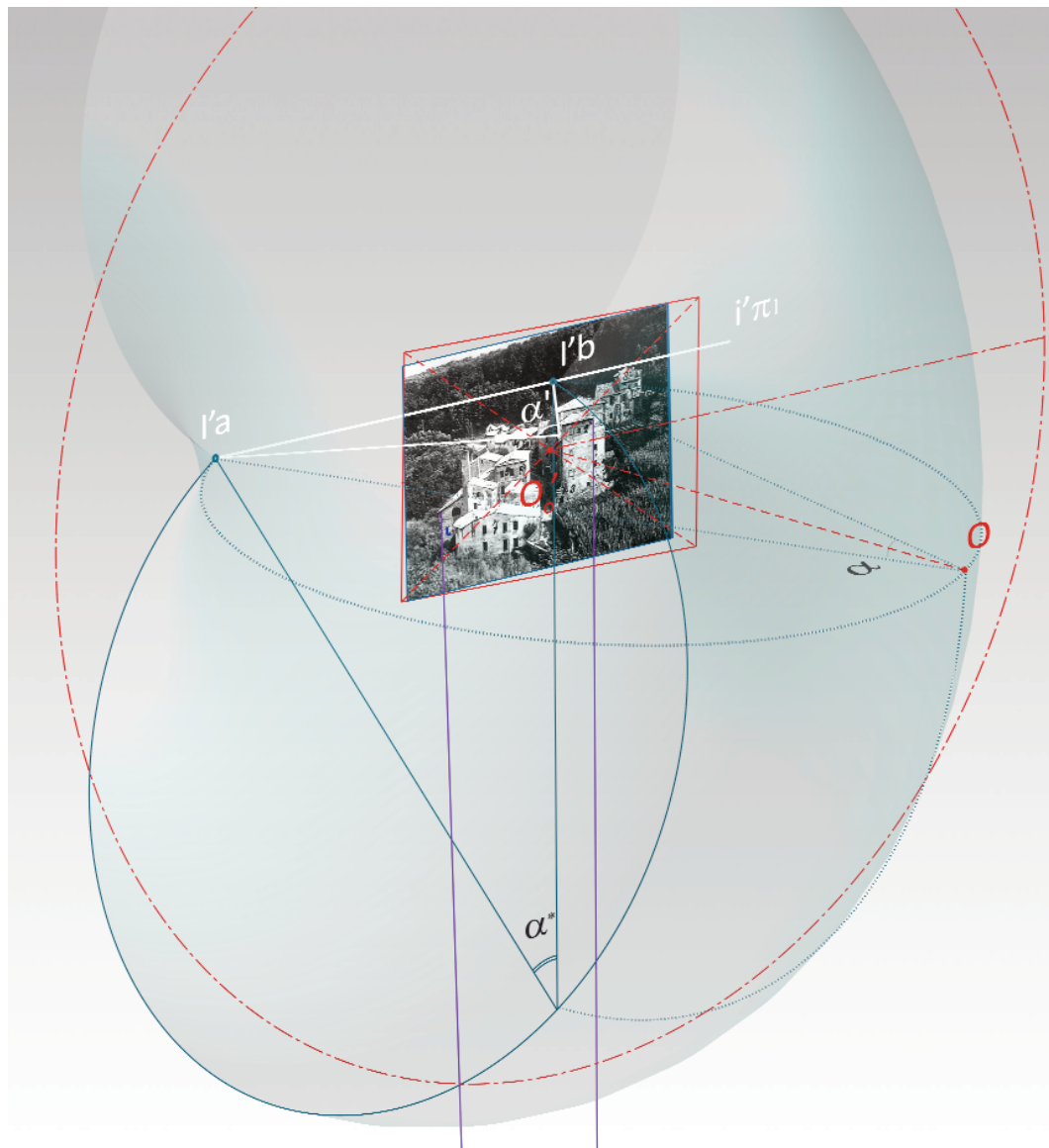
centro di proiezione nel punto in cui tale superficie incontra la distanza principale (fig. 05).

Questo procedimento è stato reiterato fino a trovare la posizione del centro che soddisfa entrambe le condizioni. La lunghezza focale è stata così determinata in funzione delle dimensioni del fotogramma. Nella ipotesi che la lastra originale abbia il formato  $6 * 9$ , la lunghezza focale risulta pari a 151 mm, lunghezza che è compatibile con le costruzioni ottiche dell'epoca, essendo equivalente a quella di un obiettivo 60 mm sul formato Leica.

### ORIENTAMENTO ASSOLUTO

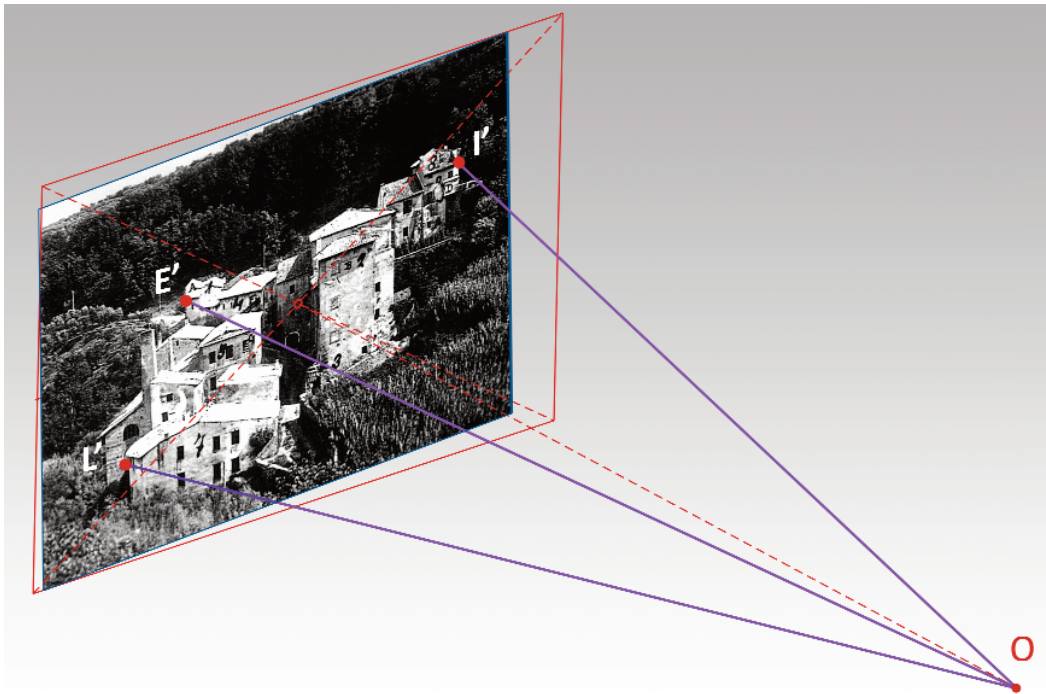
Per l'orientamento assoluto del fascio proiettivo è stato utilizzato il metodo del vertice di piramide. Questo metodo, già in uso alla fine del XVIII secolo per i rilevamenti militari dagli aerostati, consiste nel determinare la posizione del punto di osservazione, rispetto a tre punti dei quali è nota la posizione nello spazio (si veda Monge 1798, p.98). Supponiamo di trovarci in un qualsiasi luogo, che chiameremo 'centro'  $O$ , dal quale sia possibile vedere i tre punti noti, che chiameremo  $E$ ,  $I$  e  $L$ . Disponendo di uno strumento, collocato nel centro  $O$ , potremmo misurare gli angoli formati dalle tre

5. Condizioni angolari imposte: costruzione del centro di proiezione a partire dall'angolo formato dagli spigoli orizzontali dell'edificio A e dell'edificio retrostante il torrino B.



rette che collimano i punti dati e cioè: **EOI**, **IOL** e **EOL**. Si può dimostrare che, dati tre punti nello spazio, esistono solo quattro piramidi che hanno gli spigoli passanti per quei tre punti, capaci di tre angoli dati. Se si vuole determinare la posizione di **O** rispetto ai punti osservati, dunque, basta costruire queste piramidi, i cui vertici rappresentano le sole quattro posizioni dello spazio dalle quali è possibile 'vedere' i tre punti **E**, **I** e **L** sotto gli angoli come sopra misurati.

Nel nostro caso, lo strumento è rappresentato dalla fotografia della quale disponiamo, che, una volta orientata e cioè associata al centro di proie-



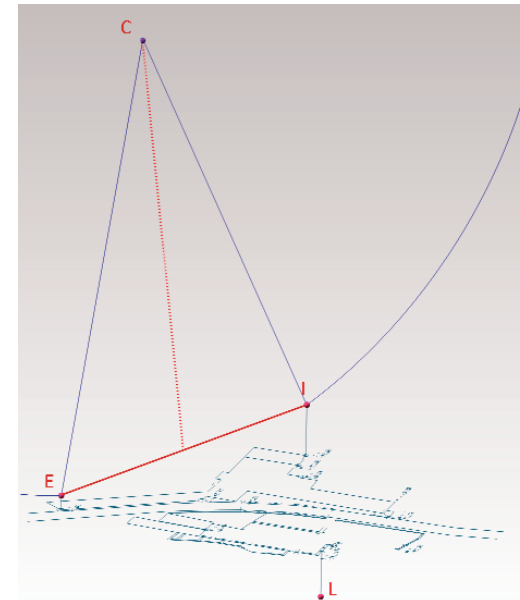
zione **O** che l'ha generata, è capace di restituire gli angoli formati dalle rette che collimano i punti fotografati. Si tratta di scegliere questi tre punti in modo opportuno, al fine di ridurre l'errore: essi dovranno essere il più possibile distanti tra loro e dovranno essere ancora oggi riconoscibili sul luogo fisico, in modo che sia poi possibile ricostruire la posizione del centro di proiezione e della lastra fotografica.

Questi tre punti sono stati individuati in **E'**, **I'** ed **L'**, come si vede nell'immagine qui riprodotta (fig. 06) e gli angoli relativi, sono quelli qui espressi in gradi sessadecimali:

$$\begin{aligned} E'O'I' &= 17.7155 \\ I'O'L' &= 23.7762 \\ E'O'L' &= 8.7568 \end{aligned}$$

Le quattro soluzioni ammesse dal problema si trovano riducendo, per intersezione, i luoghi geometrici dei punti dello spazio capaci, come si è detto, di 'vedere' i punti dati sotto gli angoli misurati.

Questi luoghi si costruiscono facilmente ricordando il teorema euclideo dell'angolo al centro. Consideriamo un segmento **AB** e un arco di circonferenza centro **C**, che passa per **A** e per **B**. Un



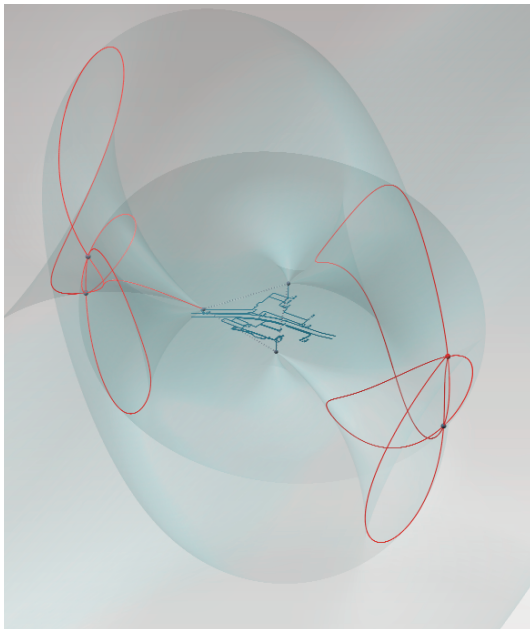
6. Misura degli angoli osservati dal centro O.

7. Costruzione del luogo geometrico dei punti dello spazio che 'vedono' i punti E e I sotto l'angolo EOI: qui è rappresentata la sola direttrice del toro relativo.

qualsiasi punto **P** dell'arco 'vede' i punti **A** e **B** sotto un angolo **APB** che è la metà dell'angolo al centro **ACB**.

Dunque, se si costruisce il segmento **EI** e l'arco capace dell'angolo **ECI**, il luogo geometrico dei punti dello spazio che 'vedono' i punti **E** ed **I** sotto l'angolo noto, è la superficie di rivoluzione che ha l'arco suddetto come generatrice e il segmento **EI** come asse di rivoluzione. Questa superficie è un toro (fig. 07).

E' possibile costruire un toro per ognuno degli angoli osservati.



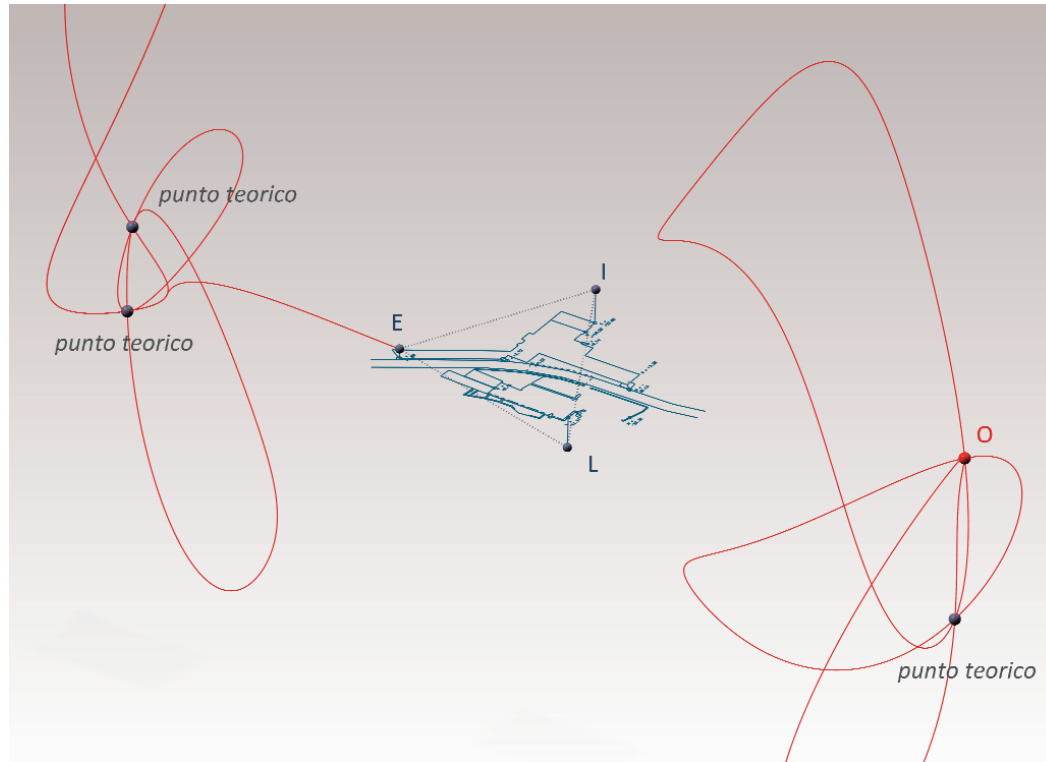
8. Soluzioni del problema del vertice di piramide: punti intersezione delle curve intersezione di tre tori.

9. Individuazione del centro di proiezione fra le quattro soluzioni del problema.

Questi tori si intersecano secondo curve sghembe e queste curve, a loro volta, si intersecano nei punti dello spazio che 'vedono' i tre punti dati sotto gli angoli misurati.

Come avevamo anticipato e come si può osservare, si hanno, in tutto, quattro soluzioni (fig. 08). Tuttavia, tre di questi punti hanno un significato meramente teorico e sono i due collocati al di sotto del suolo e quello opposto alla veduta.

Il centro della stella proiettiva generato dalla ripresa fotografica si colloca nel vertice che rappresenta, invece, una posizione possibile e coerente con l'immagine ripresa (fig. 09).



La procedura di orientamento assoluto si completa collocando il sistema formato dalla lastra e dal centro di proiezione nel centro come sopra costruito e imponendo la collinearità degli spigoli della piramide con le tre rette che uniscono il centro di proiezione **O** ai punti **E'**, **I'**, **L'**, che sono l'immagine fotografica di quelli reali **E**, **I** e **L** (fig. 10).

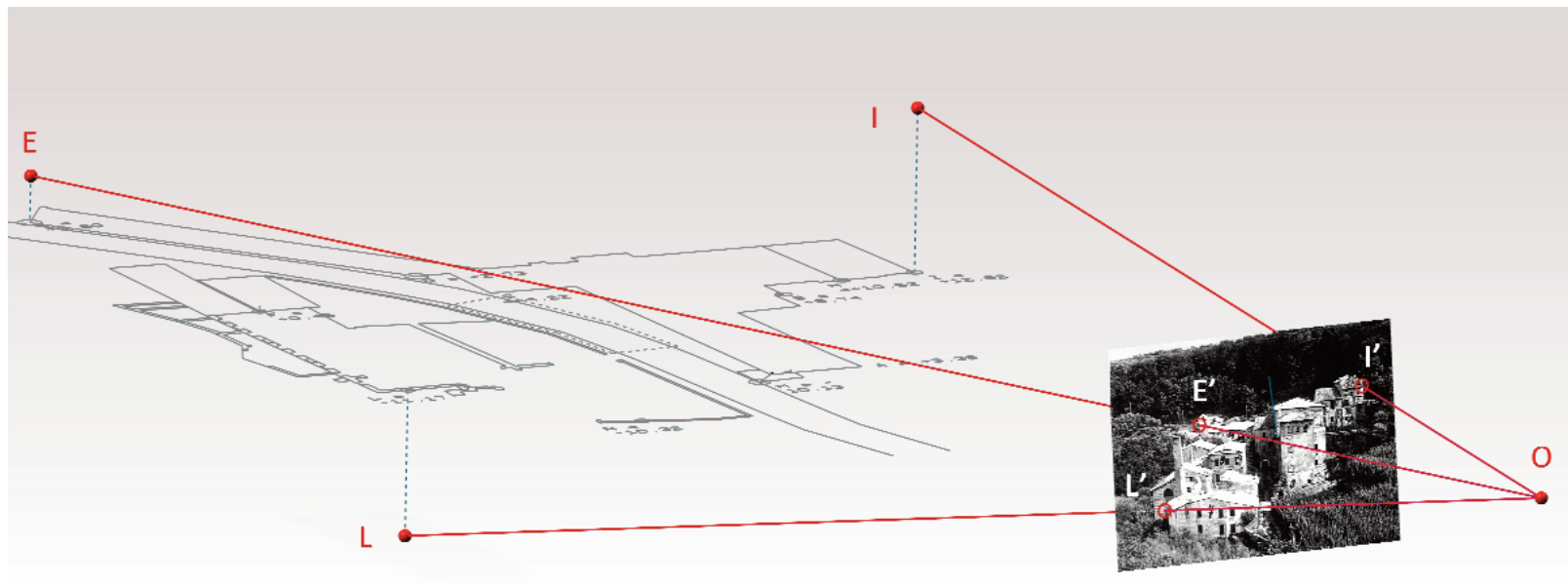
Si noti che, compiendo questa operazione, si impone altresì al sistema lastra - centro di proiezione, un preciso orientamento nello spazio e perciò la retta che proietta dal centro la direzione

verticale dovrà risultare tale, cioè verticale, o almeno assai prossima alla verticalità.

Nel caso in esame la retta di cui sopra forma, con la verticale, un angolo pari a 1.6 gradi sessadecimali.

Ciò fatto, è possibile apprezzare gli errori residui, collimando punti rilevati e verificando che l'intersezione delle relative rette proiettanti con il fotogramma, passi per le immagini dei punti stessi.

Il processo ha restituito, nel caso specifico, errori di ordine di grandezza decimetrica.



10. Associazione del sistema costituito dalla fotografia orientata e dal centro di proiezione al vertice della piramide costruita sui dati di rilievo.

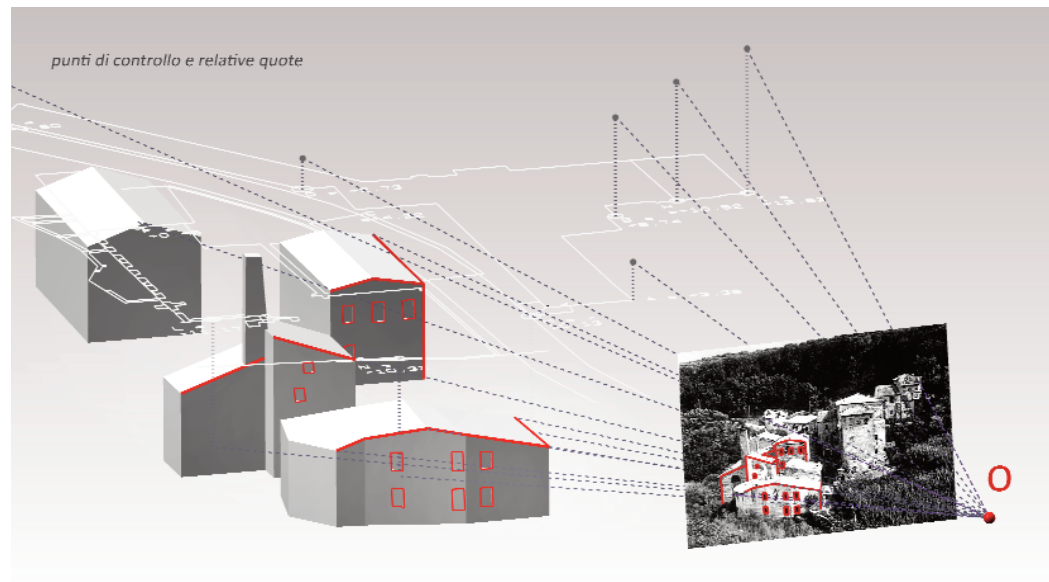
## CONCLUSIONI

Una volta collocato il fotogramma e il centro di proiezione nella posizione che aveva nello spazio reale al momento della ripresa, è possibile generare le rette che proiettano le immagini di punti di parti perdute del gruppo di edifici sulla sinistra del fotogramma. Queste rette intersecano i piani e le rette, che possono essere elevati dagli spiccati ancora esistenti, integrati con i dati delle foto aeree, in punti che restituiscono le quote e i volumi originali (fig. 11).

La soluzione del problema posto dal caso di studio si può considerare come un risultato utile. Più interessante, tuttavia, è l'esito della intersezione dei tre tori con gli assi incidenti. Si tratta, infatti, di un processo sintetico che Gaspard Monge aveva già

proposto nel 1798 quale utile alternativa ad un sistema di equazioni che egli considerava di ardua soluzione. In particolare, Monge spiega come il procedimento geometrico descrittivo, coinvolgendo la visione delle forme rappresentate, permette di escludere in modo semplice e diretto quelle soluzioni che, pur soddisfacendo il problema dal punto di vista teorico, non lo risolvono nel caso concreto perché portano a collocazioni non realistiche del centro di proiezione. Si verifica così quella simbiosi tra calcolo e descrizione analogica che Monge aveva presagito con queste parole: *la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques le plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre.*





11. Il processo di restituzione.

#### BIBLIOGRAFIA

Sulla storia della Geometria descrittiva Cardone, Vito (1996), *Gaspard Monge: scienziato della rivoluzione*, CUEN.

Dupin, Charles (1819), *Essai Historique Sur Les Services Et Les Travaux Scientifiques de Gaspard Monge*, Bachelier, Paris.

Loria, Gino (1921), *Storia della geometria descrittiva*, Hoepli, Milano.

Monge, Gaspard (1798), *Géométrie descriptive*, ed. anast. Jacques Gabay, Mayenne: 1989.

Taton, René (1951), *L'œuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, Paris.

*Sul rinnovamento della GD* Fallavollita, Federico; Salvatore, Marta (2012), *Geometria e costruzione. La teoria delle linee di curvatura nella stereotomia della pietra*, in Migliari, Riccardo (a cura di). DISEGNARECON. vol. 5 - Geometria-Costruzione-Architettura, giugno 2012, Bologna, pp.126-134.

Fallavollita, Federico; Salvatore, Marta (2013), *La costruzione degli assi principali delle superfici quadriche*, in *Disegnare idee immagini* n° 46, giugno 2013, Gangemi, Roma, pp. 42-51.

Migliari, Riccardo; Fallavollita, Federico (2012), *The geometric fundamentals of design: towards a new descriptive geometry*, in Zsombor-Murray, Paul; Sprecher, Aaron; Angeles, Bruno (edited by). "The 15th International Conference on Geometry

and Graphics" Montréal, Canada, August 1-5, 2012, pp. 473-482.

Migliari, Riccardo (2012), *Descriptive Geometry: From its Past to its Future*. In Nexus Network Journal, vol. 14, n.3, Springer, Birkhäuser Verlag Basel, pp. 555-571.

Migliari, Riccardo (2010), *I fondamenti geometrici della progettazione* in "Gli spazi e le arti, quarto volume dell'appendice XXI Secolo della Enciclopedia Italiana Fondata da Giovanni Treccani, vol. 4, pp.299-306.

Migliari, Riccardo (2008), *Rappresentazione come sperimentazione*, in *Ikhnos - Analisi grafica e Storia della Rappresentazione*, Lombardi Editori, Siracusa, pp.11-28.

*Sul problema del vertice di piramide* Piazzolla - Beloch, Margherita (1934), *Elementi di Fotogrammetria Terrestre* ed Aerea, Cedam, Padova, Parte II, V, 34, p. 55.

Dore, Paolo (1938), *Fondamenti di fotogrammetria - Fototopografia da terra e da aerei*, Zanichelli, Bologna, I, 4, p. 33.

Carpiceci, Marco (2001), *Un nuovo modello grafico-analitico per l'orientamento di fotogrammi mediante l'intersezione di tre tori*, in "Emergenza Rilievo" Kappa, Roma, 2° vol., pp.224- 252.

Haralick Robert M, Lee Chung-Nan, Ottemberg Karsten, Nölle Michael, (1994), *Review and Analysis of Solutions of the Three Point Perspective Pose Estimation Problem*, in "International Journal of Computer Vision", 13, 3, Kluwer Academic Publishers: Netherlands, pp. 331-356.